Lezione n. 1: Oggetto della Fisica

- Oggetto della fisica
- Argomenti della lezione
- Mondo materiale e fenomeni fisici
- Grandezze fisiche
- Le leggi della fisica
- Fisica e matematica
- Quali cose e come imparare: Articolazione del corso

  Prof. Angelo Tartaglia

  27'13"

La FISICA si occupa di tutti i fenomeni materiali che avvengono intorno a noi, descrivibili in diversi modi, più o meno qualitativi e quantitativi.
Il modo della fisica è quello di farlo in termini quantitativi.

Argomenti della lezione:
Mondo materiale e fenomeni (da descrivere in forma quantitativa)
Grandezze fisiche
Le leggi della fisica
Fisica e matematica
Quali cose e come imparare
Articolazione del corso

MONDO MATERIALE E FENOMENI
Già accennato che la F. si occupa dei fenomeni in termini quantitativi.
La F. cerca di attribuire ai fenomeni, alle grandezze fisiche che ci interessano dei valori numerici. C'è una corrispondenza tra il mondo dei numeri ed il mondo materiale che ci circonda.
La F. moderna tratta i fenomeni in termini quantitativi rispetto all'approccio precedente che trattava i fenomeni in modo qualitativo.

GRANDEZZE FISICHE
Misurabilità e valutazioni quantitative.
Operativamente una grandezza fisica è una qualsiasi entità materiale intorno a noi, una proprietà di ciò che è materiale a cui si può attribuire con una procedura certa e ruipetibile un valore numero.
Grandezze fisiche sono la lunghezza e la larghezza, perchè siamo in grado di associare ad esse dei numeri e possiamo fare una misura.
Altra grandezza può essere la massa o il peso di un oggetto: siamo in grado di individurae una procedura attraverso cui attribuire un valore numerico a quaesta grandezza.altro esempio è la temperatura.

LE LEGGI DELLA FISICA

La F. si interessa di grandezze fisiche e la loro misurabilità e si occupa di stabilire tra queste grandezze le relazioni, di norma causa-effetto.

Ci sono eventi che producono delle conseguenze.

La F. indaga questa concatenazione di eventi, dalla causa agli effetti e dato che cerca di attribuire un valore numerico a ciascuna delle grandezze che sono in gioco, cercherà anche di individuare le regolarità che si riscontrano nell'esperienza che abbiamo nel mondo.

Regolarità vuol dire cose che si ripetono, producendo le stesse condizioni iniziali portano alle stesse conseguenze.

Oltre a questo la F. cerca di trasformare queste regolarità in **leggi fisiche** che sono le regolarità formulate in termini matematici.

Generalmente una legge fisica ha una formulazione descrittiva seguita da una descrizione formale matematica, una equazione che lega tra loro diverse grandezze fisiche. Questo con l'obiettivo non soltanto di poter descrivere ciò che abbiamo intorno, ma anche quello di riuscire a prevedere eventi che ancora non si sono verificati o a predisporre delle situazioni

Lezione n. 2: La misura di una Grandezza Fisica

- Misure dirette
- Campioni di misura
- Misure indirette
- La lunghezza
- Il tempo
- L'analisi dimensionale

Prof. Angelo Tartaglia
35'43''

LA MISURA DI UNA GRANDEZZA FISICA

La F. è una disciplina in cui si parte da grandezze fisiche che sono delle proprietà della materia che ci circonda tali da poter essere associate a valori numerici mediante un procedimento operativo riproducibile e ben definito che chiamiamo la misura.

Misure dirette (stabilite tramite campioni di misura)
Misure indirette (stabilite tramite strumenti di misura)
Le lunghezze (la lunghezza è una delle misure fondamentali)
I tempi (il tempo è un'altra misura fondamentale)
L'analisi dimensionale

LA MISURA DIRETTA

Consiste in un confronto tra una grandezza ed un termine di paragone. Nel caso della lunghezza, scelta una unità di misura come termine di paragone, il confronto con esso mi darà la lunghezza rappresentata da un numero.

CAMPIONI DI MISURA

Rappresentano i termini di paragone per il confronto con grandezze. E vale per le lunghezze, i tempi e tutte le unità di misura considerabili.

MISURE INDIRETTE

Effettuate in mancanza di un paragone con il campione di riferimento: è la pratica usata nella stragrande maggiornaza dei casi.
Esse possono essere eseguite con un calcolo applicando una formula oppure possono essere effettuate da uno strumento il cui risultato viene letto su una scala. La misura, ripetiamo. è indiretta in quanto non è un confronto tra una grandezza ed un campione.

LE LUNGHEZZE

Ci sono grandezze più radicali di altre, più importanti, se così si può dire.
Le unità di misure (fondamentali) sono state definite a livello internazionale per convenzione e questo pure per le unità di misura derivate, calcolabili a partire dalle unità di misura fondamentali, almeno a livello di nome.
Il Sistema Internazione (S.I.) è la convenzione di queste definizioni.
Le lunghezze sono misurate in metri. La cui definizione è cambiata nel tempo. Da una sbarretta alla definizione attuale (dal 1996):
"Il **metro** è la lunghezza percorsa dalla luce nel vuoto durante un intervallo di tempo di 1/299.792.458 di secondo".
La velocità della luce è una costante universale.

I TEMPI

Il secondo è l'unità di misura fondamentale del tempo.
Osservando un sistema ad un momento ed osservandolo ad un momento successivo vedremo che le configurazioni del sistema saranno cambiate, se i cambiamenti sono periodici, la periodicità può essere presa come riferimento per il tempo: oscillazioni di un pendolo ad esempio, oppure il cronometro che si basa sulle oscillazioni di una molla che è un oggetto elastico. Fino ad arrivare alla misurazione tramite le oscillazioni di un cristallo di quarzo dopo essere stato compresso e rilasciato. Successivamente arriviamo agli orologi atomici che si basa su fenomeni oscilloscopici su scala atomica, con margini di errore attuali dell'ordine di 10^{16} parti di secondo.
L'attuale definizione nel Sistema Internazionale di secondo è:
"Il **secondo** è la durata di 9.192.631.771 periodi della radiazione corrispondente alla transizione tra due livelli iperfini dello stato fondamentale dell'atomo cesio 133".

L'ANALISI DIMENSIONALE

Alcune grandezze sono riconducibili l'una altra (il volume ad es.), altre no, come la lunghezza ed il tempo.
L'analisi dimensionale stabilisce l'omogeneità delle grandezze in gioco, ma non stabilisce l'effettiva correttezza di una formula [vd. appunti manuali].
Ad esempio se ci sono fattori moltiplicativi (numeri reali), l'analisi dimensionale stabilisce correttezza, ma il valore della formula a fronte di questi fattori assume valori diversi quindi non è possibile stabilirne la correttezza.
Dovranno essere aggiunti a questo punto dei ragionamenti per avvalorare o confutare la correttezza della formula.

IL PROBLEMA DELLA MISURA E' FONDAMENTALE IN FISICA

Se non sapessimo misurare non saremmo in grado di formulare delle leggi, quelle della F. che sono quelle che ci interessano.

ANALISI DIMENSIONALE

Lez. 2 appunti

Portata in massa $Q = \rho v$ (portata, densità, velocità), sarà una formula giusta?

25' ANALISI DIMENSIONALE

$$[Q] = \frac{[m]}{[t]} \qquad [\rho] = \frac{[m]}{[l]^3} \qquad [v] = \frac{[l]}{[t]}$$

le dimensioni della portata, kg/sec, sono quelle di una massa diviso per un tempo

densità, una massa diviso un volume

lunghezza al cubo = volume

velocità

$$[\rho v] = \frac{[m]}{[l]^3} \cdot \frac{[l]}{[t]} = \frac{[m]}{[l]^2 \cdot [t]} \neq \frac{[m]}{[t]}$$

[ ] indicano le dimensioni, non il valore.

quindi la formula è sbagliata, le grandezze devono essere omogenee

abbiamo ottenuto un fattore di più $\frac{1}{[l]^2}$

Quindi la formula $Q = \rho v$ per misurare la portata è sbagliata.

$$\cancel{Q = \rho v}$$

A = area della sezione del condotto;

Introducendo questo, abbiamo una nuova formula

$$Q = \rho A v$$

e l'analisi dimensionale di questa nuova formula è:

$$\frac{[m]}{[t]} = \frac{[m]}{[l]^3} \cdot [l]^2 \cdot \frac{[l]}{[t]}$$, corretta.

Ma il fatto che dall'analisi dimensionale la formula risulta corretta non vuol dire che lo sia davvero.

Lezione n. 3: L'Indeterminazione di una Misura

- Indeterminazione ed errore
- Errori sistematici
- Incertezza
- Propagazione dell'incertezza
- Riduzione dell'incertezza

Prof. Angelo Tartaglia

44'33''

L'INDETERMINAZIONE DI UNA MISURA

Il numero che otteniamo come risultato è affetto da una incertezza. In motivi sono diversi collegati al processo di misura e alla grandezza stessa che vogliamo misurare.

INDETERMINAZIONE ED ERRORE

Errore è lo sbaglio sistematico dovuto all'azione umana oppure alla misurazione sbagliata causa strumento non perfetto.
L'indeterminazione, o l'incertezza, è un problema intrinseco al procedimento di misura ed alla grandezza della misura che vogliamo misurare.

ERRORI SISTEMATICI

I dadi truccati.
Il dado deve dare risultati omogenei, ovvero il centro di massa deve stare al centro dell'oggetto. In caso contrario una faccia tenderà a riproporsi in modo maggiore. Allora siamo in presenza di un errore sistematico perché ad ogni lancio è più facile che si presenti una faccia piuttosto che le altre dovuta alla disomogeneità dell'oggetto.

Errore di parallasse.
Dovuto ad errori di lettura su delle scale causata dalla prospettiva dell'osservazione. E' anche questo un errore sistematico.

Altro tipo di errore sistematico è ad esempio dovuto ad un errore di creazione di uno strumento di misura, ad es. un righello.

L'INCERTEZZA

Incertezza assoluta.
Incertezza relativa.
Cifre relativa.

L'incertezza può essere correlata allo strumento di misura o alla grandezza da misurare.
L'incertezza è misurabile $y = y_0 \pm \delta y$ data dall'approssimazione.
In un righello graduato in millimetro l'incertezza approssimando al millimetro superiore od inferiore è $\pm$ 0,5.
Ad esempio l'incertezza della grandezza da misurare è quando si vuol misurare un qualcosa che, data dalla sua forma possa dare valori non costanti.

Il δy è l'incertezza assoluta, delle stesse dimesioni della grandezza da misurare (lunghezza, tempo, massa).

Dividere l'incertezza per la grandezza ($\delta y / y_0$) è una quantità detta incertezza relativa, che non ha grandezza ed è in qualche modo più significativa di quella assoluta.
Moltiplicando l'incertezza relativa per 100 otteniamo l'incertezza percentuale.

E' importante scrivere giustamente cifre significative per rendere omogeneo il risultato: si scrive ad es. 15,6 $\pm$ 0,1 (spesso $\pm$ 0,1 si sottintende e non si scrive). Nello scrivere una cifra, l'ultima è quella più significativa ed è indeterminata per un valore unitario a fronte del peso decimale. Se fosse stato scritto 15,60 sarebbe sottinteso $\pm$ 0,01.
L'incertezza relativa del primo caso è data dal rapporto tra 0,1 e 15,6; quella percentuale dall'incertezza relativa moltiplicata per 100.

PROPAGAZIONEDELL'INCERTEZZA

Quanto detto finora è valido soprattutto per le misure dirette, fra un campione ed una misura. Ma molto spesso ci confrontiamo con misure indirette cioè ricaviamo la misura di una grandezza dalla misura di altre.
Ad esempio una velocità v è il rapporto tra lo spazio percorso (l) e il tempo impiegato a percorrerlo (t): <v> = l / t indicando con <v> il valor medio per ovvi motivi.
Se percorro 5 mm. in 3 s la velocità media è 5/3 mm./s che è 1,6666666666666666 ecc.
Ma quanti decimali devo scrivere? Non tutti quelli che mi dà la calcolatrice.
Il ragionamento implica che 5 mm. sono 5,0 mm., ovvero (5,0 $\pm$ 0,1) mm.
Idem per il tempo, che sarebbe opportuno pensare come a (3,0 $\pm$ 0,1) s.
Il numero di cifre decimali giuste non è quello della divisione, ma quello dato dalla precisione delle misurazioni.
Rigorosamente, mantendendosi sulla velocità abbiamo che l (lo spazio) e t (il tempo) sono approssimabili come segue:

$l \pm \delta l$ $l \pm \delta l$

$t \pm \delta t$

La velocità potrà oscillare tra un valore massimo $v_M = (l + \delta l) / (t - \delta t)$ ed un valore minimo $v_m = (l - \delta l) / (t + \delta t)$.

Il valore della velocità, la grandezza che mi interessa è compreso tra questi estremi. Tenderò a metterlo in mezzo. Il valor medio corrisponde a l/t.

Per determinare l'intervallo di indeterminazione, ovvero il δv è la metà della differenza tra il massimo ed il minimo:

$\delta v = 1/2 \cdot (v_M - v_m) = 1/2 \cdot (2 l \cdot \delta t + 2 \cdot t \cdot \delta l) / (t^2 - \delta t^2)$

$$\delta v = \frac{1}{2} \frac{2 l \delta t + 2 t \delta l}{t^2 - \delta t^2}$$

Attenzione a non confondere l'incertezza delle misure con l'approssimazione dei calcoli, che sono cose ben diverse.

Da una valutazione realistica mi aspetto che $\delta t << t$ cioè mi aspetto che se prendo un tempo di 3 secondi l'errore possa essere dell'ordine del decimo di secondo.

Se così è, quando considero i quadrati delle grandezze lo squilibrio tra ciò che è grande e ciò che è piccolo si intensifica ancora di più il che mi permette di trascurare il δt al denominatore del risultato precedente senza sbagliare di molto. Se δt è 1/10t allora il suo quadrato è $1/100t^2$, se trascuro 1/100 farò un errore di una parte su 100 e quindi sarà un errore non particolarmente grave.

Il δv che si ottiene da questa operazione è:

$$\delta v \simeq \frac{l}{t^2} \delta t + \frac{t \delta l}{t^2}$$

Una espressione del genere può essere semplificata, in quanto posso raccogliere a fattore comune l/t che è la velocità stimata, ottenendo, dopo un secondo passaggio:

$$\frac{\delta v}{v} = \frac{\delta l}{l} + \frac{\delta t}{t}$$

Ovvero l'incertezza sulla velocità che stiamo cercando di determinare risulta essere la somma delle incertezze relative alla misura di lunghezza e alla misura di tempo.

Questo è un caso particolare di una regola generale e comunque non ci dice di poter considerare un qualunque numero decimale. Se la lunghezza è precisa all'1% e il tempo anche allora la velocità sarà precisa al 2% quindi è meno precisa di quanto lo siano separatamente la lunghezza e il tempo.

PROPAGAZIONE DELL'INCERTEZZA

La regola particolare vista prima è un caso particolare di una regola generale che ha a che fare con la propagazione dell'incertezza. Propagazione perché avevamo una incertezza primaria sullo spazio e sul tempo e questa si è trasmessa alla velocità che abbiamo derivato a partire dallo spazio e dal tempo. In questo senso l'incertezza si è propagata.

Nel caso generale abbiamo a che fare con delle grandezze fisiche.
Sia allora Y la grandezza fisica generica in questione che dipenderà da altre grandezze fisiche diverse a, b, c legate da loro da una qualche relazione.
Se queste grandezze sono affette da incertezza allora queste si riproducono anche sul valore di Y, con una certa grandezza, calcolabile. Esso varia per un valore massimo al variare di ognuna delle tre grandezze fiche a cui Y è legata. Concretamente abbiamo:

$$Y(a,b,c)$$

$$\delta y = \frac{\delta y}{\delta a}\delta a + \frac{\delta y}{\delta b}\delta b + \ldots$$

A questo punto si fa un altro passaggio approssimato e formale, perché scritto così sarebbe tutto esatto.
Si immagini che il rapporto sia mandato a 0 con continuità, il rapporto non andrà a zero ma sarà la derivata della funzione Y rispetto ad a.
δy sarà l'incertezza assoluta della variabile y, con introduzione del calcolo della derivata parziale:

$$\delta y = \frac{\partial y}{\partial a}\partial a + \frac{\partial y}{\partial b}\delta b + \ldots$$

Se applichiamo questa formula ad una espressione monomia allora ricaviamo che l'errore relativo della grandezza y è la somma degli errori relativi sui diversi parametri considerati finora.

RIDUZIONE DELL'INCERTEZZA

Misure ripetute.
Ottendo una serie di dati di cui considereremo la media, ovvero la somma dei valori divisa per il numero delle misure ($y_0 = \langle y \rangle$).

Calcoliamo quanto ogni singolo valore misurato dista dal valor medio che consideriamo buono per la misurazione, esso è lo scarto dalla media

$$y_i - y_0 = \delta_i$$

il calcolo del valor medio degli scarti è 0: $\langle \delta_i \rangle = 0$ proprio perché sono scarti dalla media.
Anzichè considerare lo scarto consideriamo i quadrati degli scarti, la cui grandezza è

sempre positiva.
In definitiva:

$$\langle y_i^2 \rangle - y_0^2 = \delta^2$$

$$y = y_0 \pm \frac{\sqrt{\langle y_i^2 \rangle - y_0^2}}{\sqrt{N}}$$

Lo scarto così individuato intorno al valor medio, al valor misurato, è inversamente proporzionale alla radice di N. Se aumentiamo il numero di letture troviamo che progressivamente lo scarto suddetto si riduce. Se facessimo, per assurdo, infinite ripetizioni troveremmo una misura precisa.
Ripetendo molte volte la stessa misura riduciamo progressivamente la dispersione intorno al valore misurato ottenendo una stima molto più affidabile della grandezza in questione di quanto nop sarebbe successo misurandola una volta sola e considerando gli scarti massimi scritti in precedenza.

Lezione 4: Sistemi di riferimento e coordinate

- Sistemi di riferimento fisici
- Sistemi di coordinate
- Coordinate cartesiane
- Distanza tra due punti
- Coordinate polari

Prof. Angelo Tartaglia
40'02"

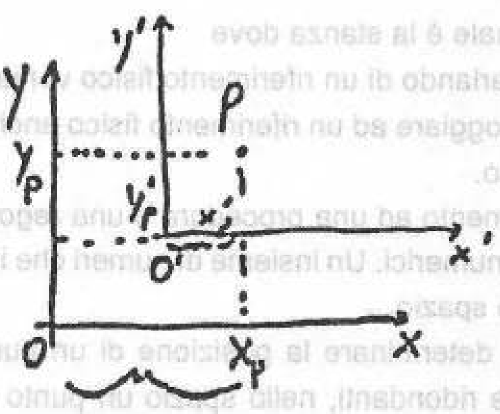
SISTEMI DI RIFERIMENTO E COORDINATE

Il riferimento fisico. Il più banale è la stanza dove
Per capire di cosa si tratta parlando di un riferimento fisico veniamo a trattare i sistemi di coordinate. Ci possiamo appoggiare ad un riferimento fisico anche se a volte il riferimento è molto idealizzato o ipotetico.
Facciamo sicuramente riferimento ad una procedura o una regola che consenta di individuare posizioni dando valori numerici. Un insieme di numeri che individuano qualche cosa, generalmente un punto nello spazio.
Quanti numeri ci voglio per determinare la posizione di un punto nello spazio? Troppe informazioni possono essere ridondanti, nello spazio un punto viene localizzato con tre valori numerici, ovviamente non della stessa misurazione, siano cioè indipendenti tra di loro.
Quindi esiste un numero minimo di parametri da individuare se si deve localizzare qualche cosa e il numero minimo dipende dal sistema.
Parliamo allora di dimensione dello spazio di riferimento. La dimensione dello spazio è la misura del numero minimo di parametri indipendenti che devono essere definiti per localizzare un punto in quello spazio. Lo spazio che abbiamo intorno è tridimensionale, quinbdi occorrono tre numeri. Lo spazio su un foglio è bidimensionale, quindi occorrono due punti. Un sistema di coordinate su una linea è unidimensionale, quindi occorre un solo numero. In altre situazioni posso avere spazi con più dimensioni.
Un sistema di coordinate è una struttura che consente di associare un gruppo di numeri in quantità pari alla dimensione dello spazio che considero ad ogni singolo punto dello spazio.

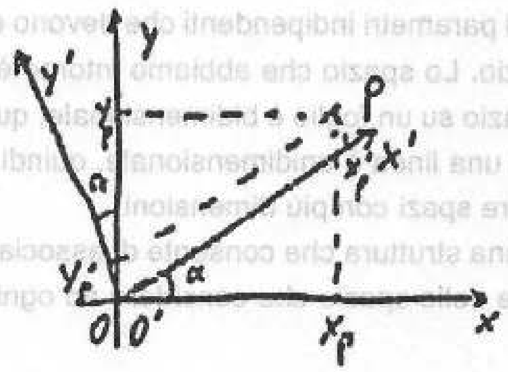
LE COORDINATE CARTESIANE

Si assume di avere un supporto fisico come gli spigoli di una stanza che ci serve per misurare delle distanze a partire da un punto comune a tre assi tra loro perpendicolari. Questo punto è chiamato l'origine degli assi. I tre assi sono tre rette ortogonali tra di loro

con nome x, y, z. In questo sistema di riferimento abbiamo un oggetto da localizzare e la procedura seguita è una proiezione dall'oggetto sui piani coordinati e dai punti trovati facciamo ulteriori proiezioni sugli assi e intercettiamo dei segmenti; la lunghezza di questi segmenti è il valore numerico delle coordinate che chiamiamo cartesiane.
Gli elementi fondamentali di un sistema di coordinate cartesiane sono: l'esistenza di un origine, i tre assi coordinati, mutuamente ortogonali, x, y, z (una terna destrorsa). Il procedimentoè univoco ed ogni punto è localizzato da un unico punto.
Il discorso risulta analogo in un sistema con due dimensioni, come un foglio.
Nel cambio di riferimenti in un sistema di coordinate non cambia nulla se non i valori attribuiti ai punti. Cioè un punto P in un sistema è sempre il punto P, le cui coordinate variano a seconda del sistema di riferimento preso in esame.
Se due sistemi di riferimento sono traslati tra loro, ovvero gli assi rimangono paralleli, allora un punto x' nel syistema di riferimento traslato sarà dato da $x' = x - x_{0'}$

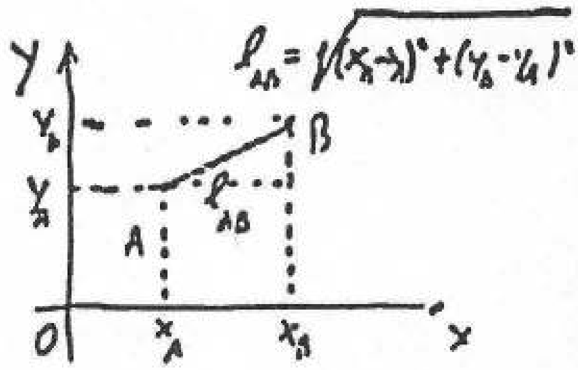


Quindi la y' nel nuovo riferimento sarà $y' = y - y_{0'}$.
Se il nuovo sistema di riferimento è ruotato e l'origine è la stessa, una e O e una è O', la conversione delle coordinate è in funzione dell'angolo di rotazione fra i sistemi di riferimento.



Il problema è di natura trigonometrica, con l'angolo a nei calcoli e proiezioni dei punti.
La conversione dalle x "vecchie" alle "nuove" è: $x'_p = x_p \cdot \cos\alpha + y_p \cdot \sin\alpha$.
La conversione dalle y "vecchie" alle "nuove" è: $y'_p = y_p \cdot \cos\alpha - x_p \cdot \sin\alpha$.
In uno spazio a tre dimensioni ruotato le cose si complicano ma la logica è la stessa.
Considerando due punti A e B in un piano cartesiano, stabiliamo la distanza tra A e B nel piano date le coordinate.

Si noti che la distanza non dipende dal sistema di riferimento, essa è una proprietà del mondo reale, non dipende dalla sua rappresentazione, quindi essa sarà la stessa in tutti i sistemi cartesiani.
La lunghezza del segmento che unisce A e B non dipende dal sistema di riferimento di coordinate.
Nelle coordinate cartesiane è facile:



Nel cambio di riferimento l_{AB} rimane lo stesso (lasciato per esercizio), sia nella traslazione che nella rotazione.

In un sistema di riferimento sia traslato che ruotato il risultato è la combinazione dei due effetti, il risultato è l'applicazione in sequenza dei due metodi.

LE COORDINATE POLARI

Si differenziano da quelle cartesiane ed in certi contesti sono più comode.

Dato un punto O ed un punto P, una prima informazione ricavabile, in assenza di riferimenti cartesiani, è la distanza tra i due punti, sia questa distanza "r". Per identificare univocamente il punto P questa informazione non è sufficiente, poichè alla distanza r abbiamo, nel piano, un cerchio intorno ad O. Serve una direzione di riferimento (vd. tratteggio), che serva di riferimento ad un angolo, l'angolo θ, Teta.
Sul pinao questo è sufficiente a localizzare P, nel piano. Nello spazio avrei bisogno di un altro riferimento, sempre ad un angolo, che è φ (Phi), angolo azimutale. I sistemi cartesiano e polare sono equivalenti e passare da uno all'altro è relativamente semplice tremite regole di conversione.

Lezione n.5: Il moto di un oggetto puntiforme

- Traiettoria e diagramma orario del moto: coordinate cartesiane
- Traiettoria e diagramma orario del moto: coordinate polari
- La velocità media
- La velocità istantanea
- L'accelerazione
- Grandezze vettoriali

Prof. Angelo Tartaglia
40'10"

IL MOTO DI UN OGGETTO PUNTIFORME

E' l'osservazione di un oggetto inesistente. Siamo nella branca detta cinematica.

TRAIETTORIA E DIAGRAMMA ORARIO DEL MOTO

Sappiamo dove si trova un punto date le sue coordinate, ad es. quelle cartesiane. Se dopo un pò di tempo le coordinate cambiamo allora si può dire che il punto si è spostato.
Nel video si vede la rappresentazione di un moto 3D con i tre diagrammi orari del moto stessi, indicando con diagramma orario la posizione rispetto agli assi cartesiani in funzione del tempo.
Da questo si nota come sia possibile scomporre il moto: il moto tridimensionale è scomposto in tre moti monodimensionali nei diagrammi orari.
In cinematica è possibile comporre e scomporre i moti.
A prescindere dal sistema di riferimento usato, sia esso cartesiano (in 3D abbiamo x, y, z), polare (in 3D abbiamo r, φ, θ), cilindrico, ellissoidale.
I diagrammi orari sono peculiari al sistema di coordinate in uso. La traiettoria però è fisica e sempre la stessa.

LA VELOCITA' MEDIA

$\langle v \rangle_{AB} = (x_B - x_A) / (t_B - t_A)$

Questa quantità misura il rapporto tra un cateto verticale ed un cateto orizzontale ed il rapporto tra due cateti di un trinagolo rettangolo è la misura della tangente di uno degli angoli che sono interni al triangolo:

$$\langle v \rangle_{AB} = \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A} = \frac{\Delta x_{AB}}{\Delta t_{AB}}$$

$$tg\,\beta = \frac{\Delta x_{AB}}{\Delta t_{AB}}$$

Dal punto di vista geometrico, la tangente misura la pendenza di una retta.
Quanto più è grande la velocità media, tanto più è ripida la curva. Dal punto di vista matematico una curva perpendicolare rappresenta una velocità pari ad infinito, che non ha comunque senso.
Un oggetto fermo in un diagramma orario è una retta parallela all'ascissa, che rappresenta il tempo.

VELOCITA' ISTANTANEA

Consideriamo che il punto B successivo sia dempre più vicino ad A calcolandone la velocità media, ovvero che la differenza di tempo sia sempre più piccola.
La pendenza della curva è la velocità istantanea del moto dell'oggetto in considerazione lingo la traiettoria.

$v = \lim_{\delta t \to 0} (\delta x / \delta t) = (dx / dt)_{t=ts}$ (x è lo spazio percorso, t è il tempo impiegato a percorrerlo)

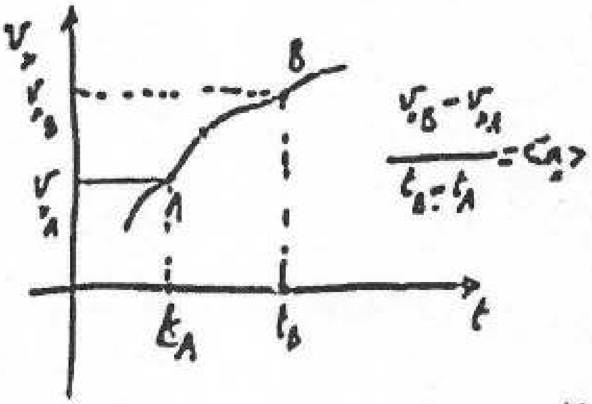
Quando δt è un valore finito abbiamo una velocità media, quando tende a 0 δx si riduce a 0 ed abbiamo una velocità istantanea. Il rapporto tende ad un valore ben preciso ed esso rappresenta la derivata di xdt fatta rispetto al tempo.
La velocità istantanea e la velocità media non sono la stessa cosa.
In fisica la velocità che viene usata è la velocità istantanea definita nel modo visto.

L'ACCELERAZIONE

In un diagramma con tempo e velocità può essere visualizzata la variazione di velocità.

L'accelerazione media è la variazione della velocità divisa per la variazione del tempo, ovvero la variazione di velocità in un intervallo di tempo:

$\langle a \rangle = (V_B - V_A) / (T_B - T_A)$



Anche in questo caso possiamo definire una accelerazione istantanea, considerando intervalli di tempo sempre più brevi e quindi configurazioni in cui A e B sono sempre più vicini in quel grafico.

$a_x = dv_x / dt$

La posizione del punto è una funzione del punto (x(t)), come la velocità (v(t)).

GRANDEZZE VETTORIALI

Abbiamo dei segmenti che rappresentano la posizione di un punto ad es.
In un sistema tridimensionale la terna (x_p, y_p, z_p) individua un punto e rappresentano le tre componenti che determinano la lunghezza del segmento $r = sqr(x^2_p + y^2_p + z^2_p)$, e questa quantità e detta raggio vettore, individua la posizione di un punto e lo individua completamente se lo considero come una freccia orientata dall'origine verso il punto, e dò insieme tutti e tre i numeri. Se dessi solo r lascerei un sistema indeterminato, sarebbe una distanza che individua tutta una sfera intorno ad un punto centrale. Ma se dò i tre numeri individuo tutto di questa freccia, individuo come questa freccia è orientata nello spazio tridimensionale, e quanto è lunga. Questa grandezza è quella che si chiama una grandezza vettoriale.
La stessa cosa posso farla anche per la velocità, per la quale ho individuato tre componenti, v_x, v_y, v_z. Anche in questo caso in un grafico potrei determinare una freccia che corrisponda alla velocità essendo questa freccia tale che quando è proiettata sull'asse x dà luogo alla v_x, quando è proiettata sull'asse y dà luogo a v_y e quando è proiettata sull'asse z dà luogo alla v_z. Questa freccia indica quanto velocemente è il movimento e in che direzione si svolge. La lunghezza della freccia, detto modulo del vettore, il cui valore è dato da $v = sqr(v^2_x + v^2_y + v^2_z)$.
Lo stesso ragionamento vale anche per l'accelerazione, che è anch'essa una grandezza vettoriale.

Fisica LEZ. 6 MOTI IDEALI

. moto rettilineo uniforme   unica direzione, velocità costante

. moto rettilineo uniformemente accelerato

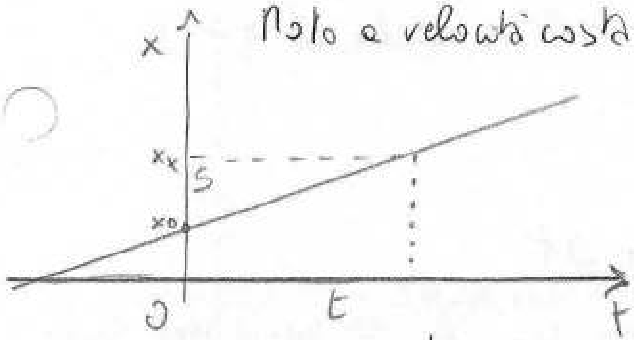
. moto circolare uniforme

Prof. Angelo Tartaglia

39'02"

MOTO RETTILINEO UNIFORME

Moto a velocità costante su una retta, ovvero in una unica direzione,

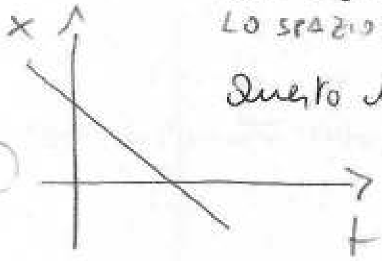


la rappresentazione come da diagramma è una retta.

$s = v\,t$ ↳ tempo trascorso ↳ velocità ↳ spazio percorso $s = x - x_0$

$x = x_0 + v\,t$ legge del moto rettilineo uniforme

LO SPAZIO È PROPORZIONALE AL TEMPO



Questo diagramma che l'oggetto anziché andare avanti, retrocede

È un moto regressivo anziché progressivo.

La pendenza della retta, in entrambi i casi, è una misura visiva di quanto è grande la velocità.

MOTO RETTILINEO UNIFORMEMENTE ACCELERATO

Così ci muoviamo su una linea retta, ad es. una strada diritta, ma non pianeggiante e la velocità non è costante nel tempo,

$$a = \frac{dv}{dt} = \text{costante}$$

ovvero abbiamo a che fare con una accelerazione

dt rappresenta un intervallo arbitrariamente piccolo, un differenziale.
dv è il cambiamento di velocità che si verifica durante quell'intervallo di tempo.

Se l'intervallo di tempo è molto breve, lo è anche il cambio di velocità.

Il limite del rapporto quando $dt \to 0$ e anche $dv \to 0$ è chiamata accelerazione.

$a = \frac{dv}{dt}$ = costante

$$\underbrace{v = v_0 + a t}_{\text{la legge con cui la } v \text{ varia nel tempo}} \quad (t \text{ istante } t)$$

LA VELOCITA' E' PROPORZIONALE AL TEMPO

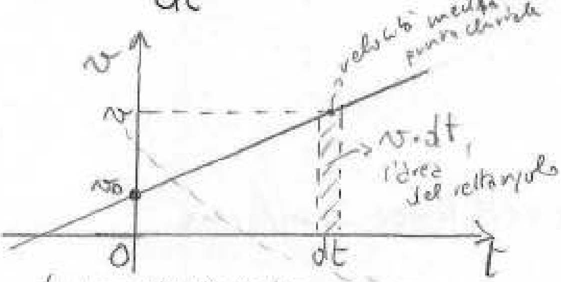
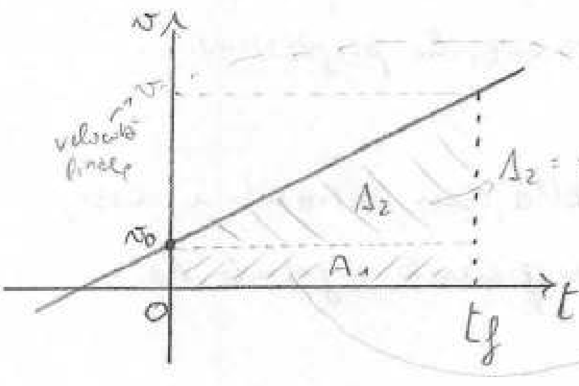


diagramma orario

PER ARRIVARE A CALCOLARE LO SPAZIO PERCORSO CON QUESTO TIPO DI MOTO:

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \underbrace{dx}_{\text{intervallo di spazio}} = v \cdot \underbrace{dt}_{\text{intervallo di tempo}}$$

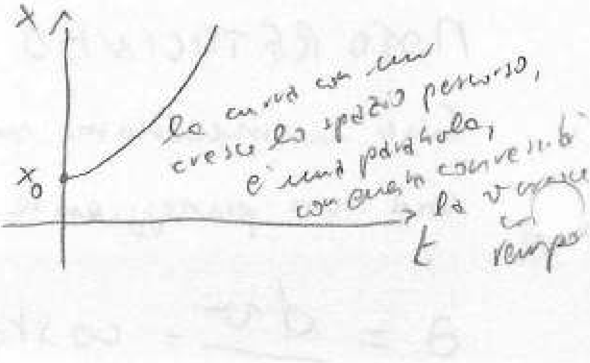


$$\left.\begin{aligned} A_2 &= \frac{1}{2} t_f (v - v_0) = \frac{1}{2} a t_f^2 \\ A_1 &= v_0 \cdot t_f \end{aligned}\right\} x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t_f^2$$

$\downarrow$ spazio percorso, LEGGE ORARIA DELLO SPAZIO PERCORSO.

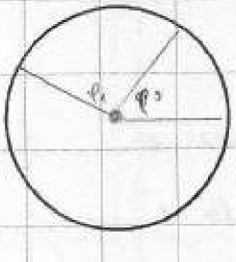
$$s = x - x_0 = \int_0^{t_f} v \, dt$$

$\downarrow$ Formula matematica dello spazio percorso



MOTO CIRCOLARE UNIFORME

È IL MOTO LUNGO UNA CIRCONFERENZA



VELOCITÀ ANGOLARE

$$\underset{\text{omega}}{\omega} = \frac{d\theta}{dt}$$

velocità angolare, rapporto tra l'angolo che viene descritto e il tempo impiegato a percorrerlo.
La misura è radianti al secondo.
Nel moto uniforme ω è costante

$$l = R\theta$$

angolo che sottende l'arco percorrente
raggio della circonferenza
spazio percorso sulla circonferenza

$$v = R \cdot \frac{d\theta}{dt} = R\omega$$

è la velocità lineare lungo la circonferenza, ovvero la velocità periferica del moto.

ACCELERAZIONE ANGOLARE

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

derivata secondo

perché $d\omega = \frac{d\theta}{dt}$

È IL CAMBIAMENTO DELLA VELOCITÀ ANGOLARE RAPPORTATO AL TEMPO DURANTE AVVIENE QUESTO CAMBIAMENTO.

ω = costante $\longrightarrow \alpha = 0$

v = costante

$\vec{V} \neq$ costante

IL VETTORE DELLA VELOCITÀ NON È COSTANTE.

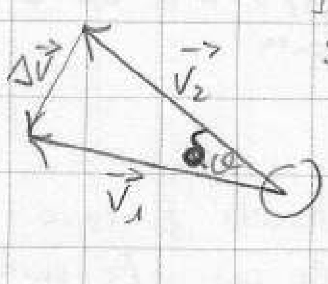
$\vec{a} \neq$ costante

La velocità come vettore non è costante e anche l'accelerazione intesa anch'essa come vettore, non è costante, anche se l'accelerazione angolare è costante.

Possiamo formalizzare tutto ciò chiedendoci quanto è grande il modulo della velocità angolare, cioè quanto è lunga la freccia che rappresenta la velocità angolare.

$\Delta \vec{V} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2 \qquad V_1 = V_2 = V = \omega R$

Il modulo di V_1 e V_2 sono uguali, ma non sono parallele.



$\Delta\vartheta$ è lo stesso angolo che separa sulla circonferenza le posizioni a cui corrisponde la velocità V_1 da quella a cui corrisponde la velocità V_2

$$\Delta V = 2V \cdot \sin(\delta\vartheta/2)$$

IN UNA SITUAZIONE DINAMICA, AL TENDERE DI V_2 A V_1 L'ANGOLO $\delta\vartheta$ TENDE A 0

$\vec{V}_2 \longrightarrow \vec{V}_1 \qquad \delta\vartheta \to 0$ e tanto è piccolo l'angolo $d\vartheta$ tanto più il $\sin(d\vartheta/2)$ tende a $d\vartheta/2$

$\sin(\delta\vartheta/2) \to \delta\vartheta/2$ e questo significa che
(RADIANTI!)

$\Delta V \to V\delta\vartheta$ $\quad \Delta V$ tende a diventare $Vd\vartheta$

MODULO DELL'ACCELERAZIONE:

$$a \to \left|\frac{d\vec{V}}{dt}\right| = V \cdot \frac{d\vartheta}{dt} = V\omega = \omega^2 R = \frac{V^2}{R}$$

FORMALIZZANDO IN MANIERA RIGOROSA:

$$\vec{a} = -\omega^2 \vec{R} = -\frac{v^2}{R}\boxed{\hat{u}_r} = -\frac{v^2}{R^2}\vec{R}$$

individua un versore, che è un vettore di modulo 1, con origine nel centro e direzione verso la periferia.

↳ la freccia è orientata verso il centro del cerchio, ovvero è orientata in maniera opposta al vettore R, che parte dal raggio

accelerazione centripeta, di notevole importanza, grandezza tipica del moto circolare uniforme.

$$\hat{u}_r = \frac{\vec{r}}{r}$$

modulo del vettore

Considerazioni dimensionali

$$[v] = [l]\cdot[t]^{-1} \qquad a = [l]\cdot[t]^{-2}$$

accelerazione m s^{-2}

una velocità è una lunghezza divisa per un tempo, è una velocità metrica;

LE DIMENSIONI SONO UNA COSA DIVERSA DALL'UNITA' DI MISURA.

LE DIMENSIONI SONO SEMPRE QUELLE, LE UNITA' DI MISURA POSSONO VARIARE

PER UNA VELOCITA' ANGOLARE LE DIMENSIONI SONO:

$$[\omega] = [t]^{-1} \qquad [\alpha] = [t]^{-2}$$

UN ANGOLO (adimensionale) DIVISO UN TEMPO

accelerazione angolare

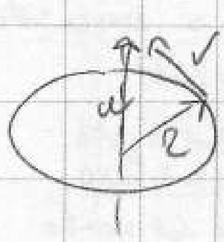
↳ DIMENSIONI DI UN ANGOLO: l'angolo è il rapporto fra un arco e il raggio del cerchio di cui quell'arco; cioè è il rapporto di due lunghezze. L'angolo è adimensionato, non ha dimensioni.

VELOCITA' PERIFERICA: $V = \omega R$

I VETTORI IN GIOCO:

$\vec{V}$ vettore velocità tangente alla traiettoria, la circonferenza

$$\bar{v} = \bar{\omega} \wedge \bar{r}$$



LEZ. 7: I PRINCIPI DELLA DINAMICA

Prof. Angelo Tartaglia 38'12"

LA QUANTITÀ DI MOTO
FORZE
LE LEGGI DI NEWTON
ESEMPI

LE LEGGI CHE REGOLANO L'INTERAZIONE TRA I CORPI IN RELAZIONE AL MOVIMENTO O ALL'EQUILIBRIO TRA I CORPI.

LA QUANTITÀ DI MOTO

Si esprime in relazione a due grandezze fisiche, una che esprime il movimento, la velocità, l'altro esprime la quantità di materia coinvolta nel movimento, la massa

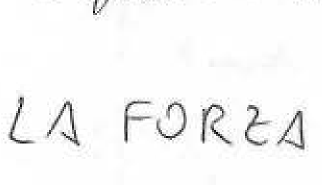
$\vec{p} = m\vec{v}$ → grandezza vettoriale, valore assoluto, direzione e verso.

↳ velocità
↳ massa
↳ quantità di moto, grandezza molto importante

La quantità di moto è una grandezza dinamica.

LA FORZA DINAMICA

La forza manifesta una reazione tra due oggetti distinti.
La forza dinamica è quella che produce effetti relativi al moto di un corpo su cui è esercitata una qualche azione, per mezzo della grandezza che, appunto, chiamiamo forza.



La forza ha provocato un cambiamento nella grandezza che chiamiamo quantità di moto.
L'oggetto, la sua massa, sono rimasti tali e quali, è cambiata la quantità di moto, in senso vettoriale.

FORZA = $\vec{F}$

LE LEGGI DI NEWTON

PRINCIPIO DI INERZIA: SENZA L'AZIONE DI UNA FORZA, UN OGGETTO PERMANE IN MOTO RETTILINEO UNIFORME (O IN QUIETE)

LA FORZA DINAMICA: $\langle \vec{F} \rangle = \dfrac{\vec{P}_{finale} - \vec{P}_{iniziale}}{\Delta t} \rightarrow \vec{F} = \dfrac{d\vec{P}}{dt}$

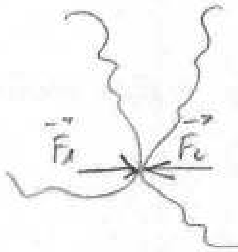
↳ Forza istantanea ($\Delta t \to 0$)

è un valore medio, FORZA MEDIA CHE HA AGITO SULL'OGGETTO DURANTE IL TEMPO Δt.

m = costante $\boxed{\vec{F} = \dfrac{d\vec{P}}{dt} = m \cdot \dfrac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}}$ Formula di Newton

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

AZIONE E REAZIONE: AD OGNI AZIONE CORRISPONDE UNA REAZIONE UGUALE E CONTRARIA.



$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

$$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$$

(Forza di inerzia si rileva in entrambi [illegible] : 2ª della lezione)
↳ la massa

(Guarda alla fine
↳ le forze esterne al sistema: l'attrito sul moto)

- Dunque per il principio di inerzia ci vuole una ~~forza~~ azione esterna per determinare un cambiamento nello stato di moto di un sistema. Se nessuna forza è applicata ad un oggetto esso o non si muove o si muove di moto rettilineo uniforme rispetto qualunque osservatore inerziale
- La forza dinamica produce variazioni di movimento. Questa è legata al prodotto di una massa di un oggetto per la sua accelerazione (cambio di velocità)
- Quando c'è un'azione tra due parti di un sistema dato, l'azione e la reazione sono uguali e contrarie

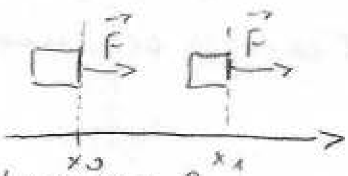
LEZ. 8 LAVORO ED ENERGIA

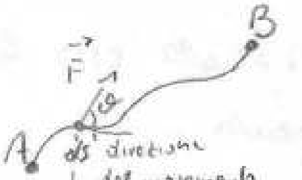
Prof Angelo Tartaglia

38'13"

Il Lavoro di una forza
L'Energia
Energia cinetica
Unità di misura

LAVORO DI UNA FORZA





Lavoro = forza × spostamento

Lavoro compiuto dalla forza $\vec{F}$

$$dL = \vec{F} \cdot \hat{u}\, ds = F \cos\vartheta\, ds$$

vettore unitario

prodotto scalare

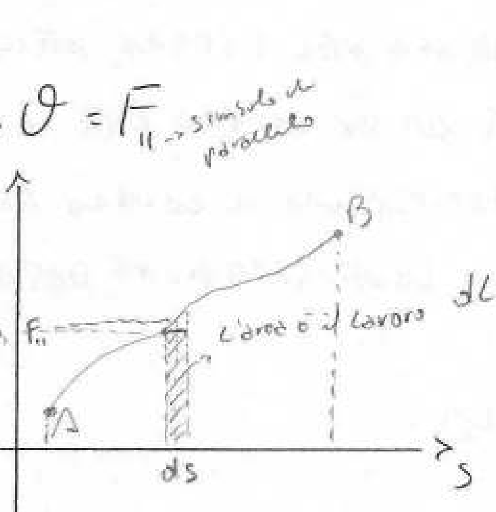
Lavoro elementare

quantità numerica che rappresenta F

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot \hat{u}\, ds = \int_A^B F \cos\vartheta\, ds$$

$$F \cos\vartheta = F_{\parallel}$$ → simbolo di parallelo

← $F_{\parallel}$ La proiezione della forza nella direzione dello spostamento, cioè la componente $F\cos\vartheta$



N.B. il grafico NON È la traiettoria!

La forza, di cui vediamo la proiezione, cresce durante il viaggio.

$$dL = F_{\parallel}\, ds$$

L'area sottesa alla curva AB è:

$$L_{AB} = \int_A^B F_{\parallel}\, ds$$

L'ENERGIA

Ad un lavoro fatto dall'esterno corrisponde una energia.
Si pensi ad un oggetto che viene preso e portato ad una certa altezza: c'è voluto un lavoro e una certa energia.
Se l'oggetto viene lasciato esso libererà l'energia accumulata nel suo primo spostamento.

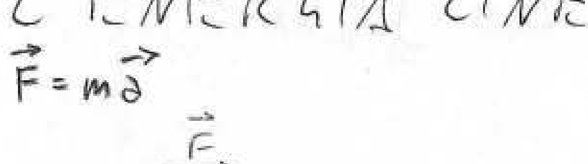
L'ENERGIA È:

LAVORO POTENZIALE: CORRISPETTIVO DI UN LAVORO FATTO.

ENERGIA E LAVORO SONO, IN UN CERTO SENSO, LO STESSO TIPO DI GRANDEZZA.
IL LAVORO DI UNA FORZA È IN ATTO, STA AVVENENDO.
L'ENERGIA, VICEVERSA, È PRESENTE NEL SISTEMA, NELLA SUA CONFIGURAZIONE E CORRISPONDE AD UN LAVORO CHE IL SISTEMA POTREBBE FARE RESTITUENDO IL LAVORO FATTO PER ESSERE STATO PORTATO ALLA CONFIGURAZIONE DATA.

L'ENERGIA CINETICA

$\vec{F} = m\vec{a}$



$$dL = F\,dx = m \underbrace{\boxed{\frac{d^2x}{dt^2}}}_{a} dx$$

Lavoro elementare, in un breve intervallo di tempo o spazio

$$dL = F\,dx = m \cdot \underbrace{\boxed{\frac{dv}{dt}}}_{a} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{dx}{dt}}}_{\text{velocità istantanea}} dt = m \frac{dv}{dt} v\,dt = m v \underbrace{dv}$$

variazione di velocità che la forza sta imprimendo all'oggetto in quell'intervallo di tempo.

Per avere un lavoro finito occorre sommare i lavori elementari:

$$L = m \int_{v_i}^{v_f} v \, dv = \frac{1}{2} m \left(v_f^2 - v_i^2 \right)$$

Se l'oggetto parte da fermo $v_i = 0$, allora l'energia cinetica è:

$$W = \frac{1}{2} m v^2$$

, essa è relativa all'osservatore, perché lo è la velocità.

UNITA' DI MISURA

$W = \frac{1}{2} m v^2$ Dimensioni $\rightarrow [W] = [m] \frac{[l]^2}{[t]^2}$

$[m] \rightarrow$ chilogrammo $\rightarrow$ kg

$[l] \rightarrow$ metro $\rightarrow$ m

$[t] \rightarrow$ secondo $\rightarrow$ s

$[W] \rightarrow kg \frac{m^2}{s^2} \rightarrow$ Joule $\rightarrow$ J

ESEMPIO:

UNA PERSONA CHE CORRE A 10 m/s (36 km/h), DI MASSA 70 kg HA UNA ENERGIA CINETICA DI

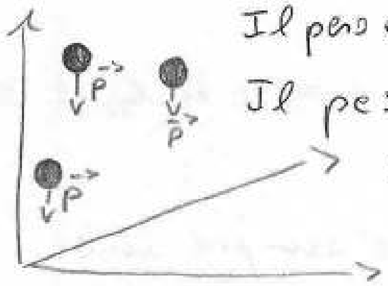
$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \cdot 70 \cdot 10^2 = 3500 \text{ J}$$

LEZ 9 LA FORZA PESO

CAMPO DI FORZE distingue il peso da una trazione
ACCELERAZIONE DI GRAVITA' attraverso il II° principio della dinamica
ENERGIA POTENZIALE GRAVITAZIONALE
GRAVITAZIONE UNIVERSALE onnipresenza del peso

Prof. Angelo Tartaglia
38'28"

CAMPO DI FORZE



Il peso è ovunque.

Il peso è un campo di forze

In qualunque punto del campo può essere individuata una forza che è quella del peso, che è rappresentata con un vettore e che manifesta quella grandezza, quella entità che matematicamente viene chiamato campo di forze.

UNO STESSO OGGETTO IN UN VOLUME NON TROPPO GRANDE HA DOVUNQUE LO STESSO PESO.
↓
INTORNO A NOI IL CAMPO DELLA FORZA PESO È PRATICAMENTE UNIFORME

la forza è la stessa in diverse posizioni del campo.

L'ACCELERAZIONE DI GRAVITA'

$\vec{P} = m\vec{a}$ $\qquad \frac{\vec{P}}{m} = \vec{a} = \vec{g}$

Anche l'accelerazione di gravità è un campo, con lo stesso valore ovunque e per qualunque oggetto, cioè uniforme.

$\overrightarrow{P_2 \downarrow \vec{g}}$

$\vec{P_1} \neq \vec{P_2}$

$\vec{g}$ costante

IL MOTO DI CADUTA DI UN OGGETTO

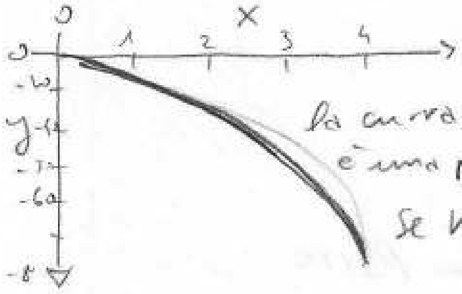
$x = v_0 t \Rightarrow t = \frac{x}{v_0}$

↳ velocità orizzontale
x iniziale = 0
↳ moto orizzontale

$y = -\frac{1}{2} g t^2 \rightarrow y = -\frac{1}{2} g \cdot \frac{x^2}{v_0^2}$

↳ moto verticale; velocità iniziale = 0; y iniziale = 0

- perché è verso il basso, rispetto agli assi



la curva è una parabola;

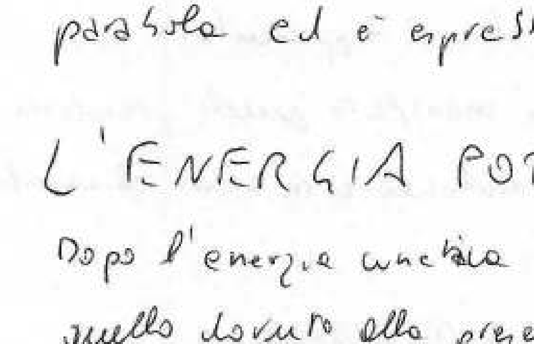
Se $v_0 = 0$, l'oggetto cade lungo la verticale e la legge che lo regola è $y = -\frac{1}{2} g t^2$

La traiettoria di caduta, se $v_0 \neq 0$, è sempre una parabola ed è espressa dall'equazione $y = -\frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2}$

L'ENERGIA POTENZIALE GRAVITAZIONALE

Dopo l'energia cinetica vediamo un nuovo tipo di energia potenziale, quello dovuto alla presenza del campo della forza peso e che è legato alla posizione degli oggetti gravitanti (quindi, sottoposti alla forza peso). La loro posizione comporta la presenza di una energia accumulata nella posizione stessa.

Questa energia può essere convertita in lavoro meccanico.



$\vec{P} = m\vec{g}$ — il peso della sfera sulla pedana

$\vec{F} = -m\vec{g}$ — la forza di reazione della pedana, che impedisce all'oggetto di cadere (principio di azione e reazione)

Immaginiamo che la sfera si alzi lentamente, quindi la forza esterna ha lavorato positivamente mentre il peso ha lavorato negativamente.

Il lavoro della forza esterna è:

$$L_e = \int_0^h F\, \underbrace{dz}_{\text{spostamento elementare}} = F h = \underbrace{mg}_{F} h$$

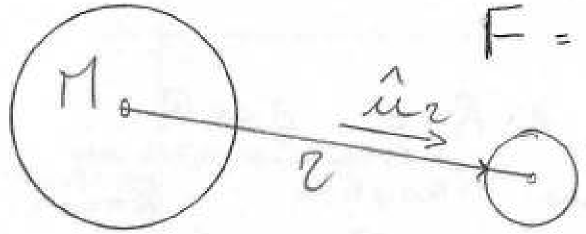
è lavoro potenziale, energia potenziale gravitazionale dovuta alla configurazione nuova del sistema.

F è costante durante lo spostamento

La formula che posso scrivere in funzione di Z dell'energia potenziale è:

$$W = mg(\underbrace{z - z_0}_{h}) = mg\underset{\text{variabile}}{z} + \text{costante}$$

LA GRAVITAZIONE UNIVERSALE



$$\vec{F} = -\underset{6{,}6\cdot10^{-11}\ S.I.}{G} \cdot \frac{mM}{r^2} \cdot \hat{u}_r$$

la forza che agisce sulla massa minore

LEGGE CHE VALE IN TUTTO L'UNIVERSO

Definita la forza, è definibile l'energia potenziale gravitazionale da questo punto di vista:

$$W = G \cdot \int_{(\text{iniziale})}^{(\text{finale})} \frac{mM}{r^2}\, dr = -G\frac{mM}{r} + \text{costante}$$

↳ rispetto alla posizione

segno più perché immaginiamo di eseguire contro il peso.

LO SPOSTAMENTO È RADIALE, OVVERO LUNGO LA CONGIUNGENTE.
SE COSÌ NON FOSSE IL RISULTATO FINALE SAREBBE LO STESSO.

IL VALORE DI W, DELL'ENERGIA POTENZIALE GRAVITAZIONALE, È NEGATIVO, ED È DIVERSO DA QUELLO CALCOLATO NEL CAMPO GRAVITAZIONALE DELLA TERRA, CHE ERA POSITIVO.

LA COSTANTE è qualsiasi cosa, purché non dipenda da r, è una costante rispetto alla posizione e questa energia potenziale continua a funzionare, cioè la differenza del suo valore finale e quello iniziale, che elimina la costante, è una misura del lavoro che una forza esterna deve fare per spostare un ~~og~~ oggetto da un punto a un altro.

Più formalmente possiamo invertire la formula e trovare che la forza che agisce, la forza peso è:

$$\vec{F} = -\underbrace{\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial r}}_{\text{spostamento elementare}} \overset{\text{versore radiale}}{\hat{u}_r} \quad \text{(semplificata)}$$

Vicino alla superficie della terra $r = R + z$; $z << R$

z: elevazione rispetto alla superficie terrestre; R: raggio terra

e mettendo in evidenza tutto otteniamo:

$$\vec{F} = -G \frac{mM}{(R+z)^2} \hat{u}_r \cong -m \overbrace{G \frac{M}{R^2} \hat{u}_r}^{\vec{g}} = -m\vec{g}$$

togliendo z, l'errore sarà al più una parte su 10 000 (10^{-4})

Possiamo fare un ragionamento simile per l'energia potenziale, abbiamo:

$$\mathcal{U} = -G \cdot \frac{mM}{R+z} \cong -mG \cdot \frac{M}{R} + mG \cdot \frac{M}{R^2} z = mgz + \text{costante}$$

LEZ. 10 LA FORZA ELASTICA

CORPI DEFORMABILI
LEGGE DI HOOKE
L'ENERGIA POTENZIALE ELASTICA
OSCILLAZIONI DI UNA MOLLA

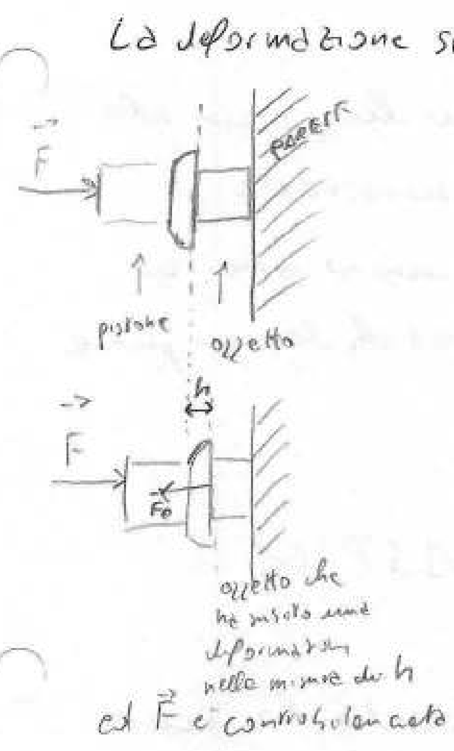
Prof. Angelo Tartaglia
55'

CORPI DEFORMABILI

I corpi sono tutti più o meno deformabili in funzione delle loro caratteristiche meccaniche fisico-chimiche.

Per deformare un corpo occorre applicare una forza.

La deformazione si associa con una reazione dell'oggetto contro la deformazione stessa.



La reazione è quella che definiamo forza elastica legata alla deformazione.

La deformazione è misurata, in questo caso, in base a uno spostamento h che è lo spostamento consentito fino al momento in cui la forza applicata dall'esterno viene completamente controbilanciata, si raggiunge l'equilibrio. Allora, a questo punto si può dire che c'è una reazione elastica da parte dell'oggetto che è stato deformato che contrasta la forza applicata dall'esterno con la forza elastica $\vec{F_e}$.

Nell'esempio il ragionamento (essenziale) è fatto lungo un asse, lungo cioè una sola direzione. Nella realtà la situazione è più complessa.

def: LA FORZA ELASTICA È UNA REAZIONE ALLA DEFORMAZIONE.

LA LEGGE DI HOOKE

def: È la legge che governa l'elasticità: LA FORZA ELASTICA È PROPORZIONALE ALLA DEFORMAZIONE.

Se non c'è deformazione non c'è forza elastica

$$\vec{F} = -k\,h\,\underbrace{\hat{u}_h}_{}$$ e vale per applicazioni lungo un solo asse

versore
vettore di modulo 1, verso e direzione
→ misura della deformazione
→ coefficiente di proporzionalità: dipende dalla natura del materiale.

k è la costante elastica

Nella realtà una deformazione non avviene mai lungo un solo asse, ma per comodità il principio e la trattazione verte sulla contrazione o dilatazione lungo un unico asse, ad esempio si pensi ad una molla soggetta ad una forza che la comprime o ad una forza che la espande.

L'ENERGIA POTENZIALE ELASTICA

L'oggetto torna alla forma iniziale togliendo le cause della deformazione. Se questo non succede la deformazione subita dell'oggetto è una deformazione plastica, permanente. Nella deformazione elastica è immagazzinata energia che definiamo energia potenziale elastica.

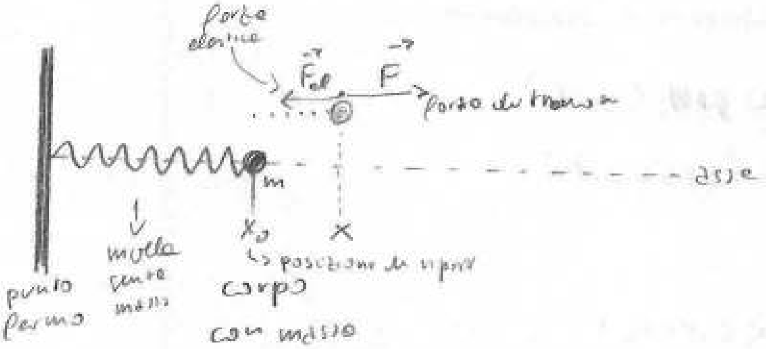
LAVORO DI DEFORMAZIONE (monodimensionale) $dL = F\,dh = -F_{elastica}\,dh = \underbrace{dW}_{\text{variazione di energia potenziale}}$

ENERGIA POTENZIALE $W = \int_0^h F\,dh' = \int_0^h \underbrace{k h'\,dh'}_{\text{come sopra}} = \underbrace{\frac{1}{2} k h^2}_{\text{definita a meno di una costante arbitraria}}$

→ $h' \neq h$ intervallo di integrazione, è una precisazione

$W_{elastica} > 0$

OSCILLAZIONI DI UNA MOLLA



Nell'eliminare la forza esterna, la molla oscilla in funzione della forza elastica che tende a portare la molla nella posizione di partenza.

Nel fare questo, la forza elastica converte l'energia potenziale elastica in una energia cinetica.

La molla arriverà al punto di partenza con una certa velocità ed avendo l'oggetto una massa ci sarà una inerzia e allora per inerzia la molla verrà compressa dalla forza di inerzia in senso opposto. Rinascerà una reazione elastica che tenderà a riportare indietro il tutto e così via e questo processo, a meno di processi dissipativi, continuerà in ~~modo~~ tempo indefinito.

$$m\vec{a} = \underbrace{\vec{F}}_{\text{forza esterna}} + \vec{F}_{el}$$

come può essere definita la legge del moto in questa situazione

In equilibrio $\vec{F}_{el}$ è $-\vec{F}$

Ipotesi $\vec{F} = 0$ la forza esterna si è ridotta a 0, in posizione $\neq$ da quella iniziale di equilibrio

eq. del moto: (è una eq. differenziale del 2° ordine)

$$m\underbrace{\ddot{x}}_{\frac{d^2x}{dt^2}} = m\frac{d^2x}{dt^2} = \underbrace{-k(x - x_0)}_{\text{forza elastica}}$$

La soluzione generale è:

$$x - x_0 = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$$

↳ frequenza di oscillazione.

derivate della soluz. → $\dot{x} = A\omega\cos(\omega t) - B\omega \sin(\omega t)$

$$\ddot{x} = -A\omega^2\sin(\omega t) - B\omega^2\cos(\omega t)$$

Avendo $m\ddot{x} = m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -k(x-x_0)$

e $x - x_0 = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$,

sostituendo, abbiamo

$$-m\omega^2[A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)] = -k[A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)]$$

$$\Downarrow$$

$$m\omega^2 = k$$

↳ frequenza di oscillazione

La frequenza di oscillazione (pulsazione)

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Ipotesi $t = 0 \Rightarrow x = x_0$

allora $x - x_0 = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) \Rightarrow B = 0$

$$x - x_0 = A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t\right)$$

Determiniamo il parametro A

$\dot{x} = 0$ $\qquad t = t_{m_{assimo}} =$

↓ alla massima estensione, la velocità è nulla

↓ tempo al quale c'è estensione massima, in cui per un istante la molla si ferma

$$\dot{x} = A\sqrt{\frac{K}{m}} \cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}} \cdot t\right) = 0$$

Per ricavare t_m (t massimo): il t_m deve essere tale da far sì che il coseno sia 0

Il coseno è 0 quando il suo argomento è multiplo di $\frac{\pi}{2}$.

(funzione armonica; dispari)

$$\sqrt{\frac{K}{m}} \cdot t_m = \frac{\pi}{2}$$

$$x_m - x_0 = A \sin\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\, t_m\right) = A \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = A$$

↳ è l'ampiezza dell'oscillazione

Analizziamo un'altra situazione: un'asta

In questo caso posso usare le forme viste, ma anziché avere una variabile x, che è una lunghezza, un allungamento o un accorciamento, in questo caso ho a che fare con un angolo, quello della tangente con l'orizzontale dell'asta in condizioni indeformate.

L'angolo α è quello che era la variabile x.

Per il resto tutto funziona allo stesso modo.

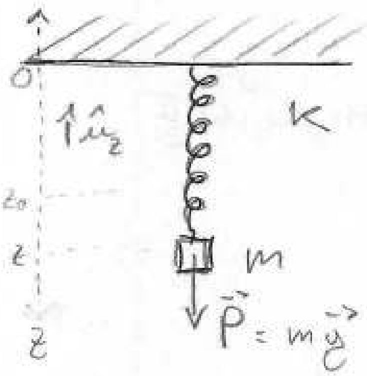
Anziché ragionare in termini di forza, gli enti più aderente

più aderente al problema, in termini di forza applicata ad una certa distanza, di momento della forza che tende a produrre l'incurvamento.
Comunque rimane valida la legge di Hooke.

La deformazione espressa dall'angolo α è proporzionale al momento torcente che è applicato alla sbarretta.

NUOVA SITUAZIONE

MOLLA CON PESO AD UN SOFFITTO



Caso di un molla attaccata ad un soffitto, con un peso alla altra estremità. Supponiamo di considerare la costante elastica della molla e la massa dell'oggetto, trascurando la massa propria della molla. Sia z l'asse della verticale, orientato verso il soffitto.

L'oggetto è soggetto alla forza di gravità nella misura del suo peso. Esso mette in tensione la molla che reagisce con una forza elastica F_e.

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

posizione della molla senza l'oggetto

$$\vec{F_e} = -\underbrace{k(z - z_0)}_{\text{costante - deformazione}}\,\hat{u}_z$$

la forza dell'elasticità è opposta alla forza peso.

c'è un segno −
per andare d'accordo con il verso di $\hat{u}_z$
devo mettere un − davanti a k

Quale è la configurazione di equilibrio di questo sistema?

È quella in cui la forza peso uguaglia, con verso opposto, la forza elastica:

$$mg = k\,|z - z_0|$$

La deformazione che corrisponde all'equilibrio è così espressa:

$$|z - z_0| = \frac{mg}{k}$$ tanto più la molla è rigida, tanto minore è la deformazione.

nel ns. caso è uno spostamento verso il basso.

Altro problema è quando il sistema viene portato fuori dalla posizione di equilibrio, quando, ad es., la molla viene tirata. Il sistema comincerà ad oscillare; con quale frequenza?
occorre scrivere le equazioni di oscillazione ed adattarle a questo caso, in cui entra in gioco la forza di gravità. Le oscillazioni non sono intorno al punto di riposo della molla, ma attorno al punto di equilibrio che è quello che corrisponde alla soluzione $z - z_0 = \frac{mg}{k}$
Oscillerà intorno a questo punto, con una frequenza da determinare e che discende dalle formule scritte prima.

$$K_{\text{costante elastica}} = \frac{\text{Forza Elastica}}{\text{misura della deformazione}}$$

$$\text{massa} = \frac{P}{g}$$

$$\text{Forza Elastica} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{K^{\text{costante elastica}}}{m_{\text{massa}}}}$$

ovvero: una molla avente costante elastica K ed appesa su una massa m, ha come frequenza di oscillazione:

$$f_{ree} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{K}{m}}$$

10.8

Moto armonico

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

In fisica, il **moto armonico** è il particolare moto vario descritto da un **oscillatore armonico**, cioè un sistema meccanico che reagisce ad una perturbazione dall'equilibrio con una accelerazione di richiamo $a_x = d^2x/dt^2$ proporzionale allo spostamento subito x. La costante di proporzionalità è *sempre* negativa e si può quindi intendere, come qualsiasi numero reale negativo, come l'opposto di un quadrato di un altro numero costante ω, detto **pulsazione**, così indicato in quanto dimensionalmente simile alla velocità angolare. Quindi l'equazione del moto di un **oscillatore armonico** è:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

A livello dinamico, una possibile causa è la forza di Hooke:

$$F_H = -kx$$

dove k è una costante positiva (detta modulo di Young) che risulta, tenendo conto del principio di proporzionalità di Newton dalla relazione:

$$k = m\omega^2$$

Se F_H è la sola forza agente, il sistema è detto *oscillatore armonico semplice (o naturale)* con equazione del moto pari a quella succitata: il moto armonico semplice presenta oscillazioni sinusoidali attorno al punto di equilibrio, con ampiezza e frequenza (detta *naturale*) costante.

Esempi meccanici di oscillatori armonici semplici sono il pendolo semplice (per piccoli angoli di oscillazione) ed una massa attaccata ad una molla. Analoghi sistemi fuori dalla meccanica includono i sistemi acustici vibranti, e gli oscillatori armonici elettrici tra cui i circuiti RLC.

Va ricordato che esistono altri tipi di oscillatori anarmonici o non lineari, tra cui riveste particolare importanza l'oscillatore di Van der Pol.

Indice

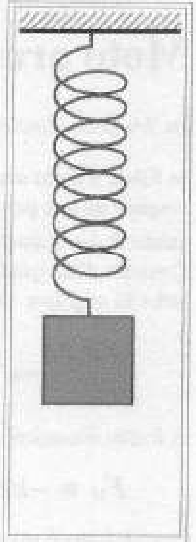
1 Moto armonico libero semplice
2 Moto armonico libero smorzato
  2.1 Sottosmorzamento
  2.2 Smorzamento critico
  2.3 Sovrasmorzamento
3 Moto armonico forzato semplice
  3.1 Sottoforzamento
  3.2 Forzamento critico
  3.3 Sovraforzamento
4 Moto armonico forzato smorzato
5 Sistemi equivalenti
6 Note
7 Bibliografia
8 Voci correlate
9 Altri progetti
10 Collegamenti esterni

Moto armonico libero semplice

Il **moto armonico libero semplice** è detto anche **moto armonico naturale**: esso è una oscillazione sinusoidale con pulsazione ω. Tale moto è periodico. La posizione di un corpo che oscilla secondo il moto armonico semplice, con l'origine del sistema di riferimento posizionata nel punto attorno al quale avviene l'oscillazione, può essere descritto attraverso una funzione sinusoidale di ampiezza e fase costanti:[1]

$x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$ (legge oraria per moto unidimensionale lungo l'asse x)

dove $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ è il periodo dell'oscillazione (ovvero l'intervallo di tempo tra due oscillazioni),[2] mentre A e ϕ sono rispettivamente l'ampiezza dell'oscillazione e la costante di fase (che dipendono dalla posizione $x(0)$ e velocità iniziale $v_x(0)$ del moto).



Molla in moto: oscillatore armonico semplice

La velocità e l'accelerazione sono rispettivamente la derivata prima e seconda della legge oraria, ovvero:[2]

$$v_x(t) = \omega A cos\,(\omega t + \phi)$$ (derivata prima della legge oraria)

$$a_x(t) = -\omega^2 A sin\,(\omega t + \phi) = -\omega^2 x(t)$$ (derivata seconda della legge oraria)

Le costanti A e ϕ si determinano imponendo le condizioni iniziali e risolvendo il sistema di equazioni

$$x(0) = A\sin\phi \qquad v_x(0) = A\omega\cos\phi$$

che ammette le soluzioni

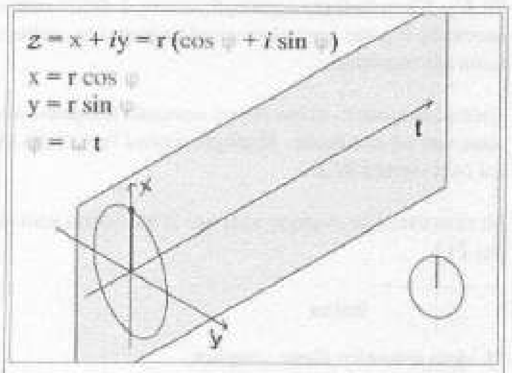
$$A^2 = x(0)^2 + \frac{v_x(0)^2}{\omega^2} \qquad \tan\phi = \frac{x(0)\omega}{v_x(0)}.$$

L'energia cinetica K del sistema all'istante t' è:

$$K(t) = \frac{1}{2}mv_x(t)^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\cos^2(\omega t + \phi) = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \phi),$$

mentre l'energia potenziale si può scrivere come:

$$U(t) = \frac{1}{2}kx(t)^2 = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \phi).$$



Moto circolare e moto armonico

L'energia meccanica totale del sistema è perciò un integrale primo di moto, cioè una sua costante:

$$E = K + U = \frac{1}{2}kA^2.$$

Il moto armonico semplice può essere generalizzato componendolo in modo multidimensionale: in particolare risulta su una qualunque coppia di assi cartesiani compone il moto circolare uniforme nel piano:

$$\begin{cases} x = -\frac{a_x}{\omega^2} \\ y = -\frac{a_y}{\omega^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{a_x^2}{\omega^4} \\ y^2 = \frac{a_y^2}{\omega^4} \end{cases} \Rightarrow r^2 = x^2 + y^2 = \frac{a_x^2 + a_y^2}{\omega^4} = \frac{a^2}{\omega^2}$$

Quest'ultima relazione vale appunto per un moto circolare uniforme (e non per un qualsiasi moto circolare).

Un'analoga dimostrazione che qui non presentiamo può essere fatta per generalizzare questo moto a tre dimensioni componendolo con tre moti armonici semplici sugli assi cartesiani dello spazio tridimensionale, e rendendo diversa tra loro l'ampiezza, col risultato di un moto ellittico.

Moto armonico libero smorzato

Il **moto armonico libero smorzato** è detto anche **moto armonico ammortizzato**. Nello studio di fenomeni fisici reali i corpi in movimento sono di solito soggetti a attriti, di solito direttamente proporzionali alla velocità $F_S = c\frac{dx}{dt}$.

Ponendo $\omega_S = \frac{c}{m}$ e $\omega_N = \sqrt{\frac{k}{m}}$, abbiamo:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_S\frac{dx}{dt} + \omega_N^2 x = 0$$

Per ottenere la soluzione di una equazione differenziale lineare è necessario prima di tutto risolvere l'equazione di secondo grado agli autovalori λ associata:

$$\lambda^2 + \omega_S \lambda + \omega_N^2 = 0$$

ricavando il $\Delta = \omega_S^2 - 4\omega_N^2$

che fornisce le due radici (autovalori):

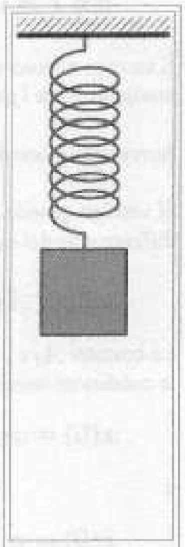
$$\lambda_1 = -\frac{\omega_S - \sqrt{\Delta}}{2} = -\frac{\omega_S}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\omega_S^2 - 4\omega_N^2}$$

$$\lambda_2 = -\frac{\omega_S + \sqrt{\Delta}}{2} = -\frac{\omega_S}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\omega_S^2 - 4\omega_N^2}$$

Si noti che entrambe le soluzioni hanno parte reale negativa.

Distinguiamo tre casi:

- sottosmorzamento $\Delta < 0$
- smorzamento critico $\Delta = 0$
- sovrasmorzamento $\Delta > 0$



Molla sottosmorzata

Sottosmorzamento $\Delta < 0$

È il caso che si verifica se $\omega_S < 2\omega_N$; il sistema riesce a compiere oscillazioni attorno alla posizione d'equilibrio $x = 0$. In effetti in questo caso le radici λ_1 e λ_2 sono complesse (essendo l'argomento della radice negativo); ciò comporta che la soluzione dell'equazione differenziale contenga un termine con esponenziale complesso, il quale facendo uso dell'identità di Eulero rappresenta per un termine "oscillante". Il termine reale della radice, in quanto negativo, si occupa dello smorzamento dell'oscillazione.

Ponendo l'effettiva pulsazione $\omega = (\sqrt{4\omega_N^2 - \omega_S^2})/2$ si ha come soluzione la legge oraria:

$$x(t) = e^{-\frac{\omega_S}{2}t}(A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t)$$

Quindi trattasi palesemente di un'oscillazione di frequenza $\frac{\omega}{2\pi}$, la cui ampiezza diminuisce esponenzialmente nel tempo: si veda anche il grafico.

Si noti ancora che la pulsazione di oscillazione nel caso di piccolo smorzamento è **sempre** inferiore alla pulsazione naturale, cioè alla quale oscillerebbe il sistema non influenzato dall'attrito viscoso. Questo ha d'altra parte un ovvio significato fisico: la presenza di viscosità rallenta continuamente il movimento dell'oscillatore.

Smorzamento critico $\Delta = 0$

Si verifica quando $\omega_S = 2\omega_N$; in tal caso poiché $\lambda_1 = \lambda_2$ (che diremo semplicemente λ) la soluzione dell'equazione differenziale del moto fornisce la legge oraria:

$$x(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-\frac{\omega_S}{2}t}$$

ed ancora una volta le costanti A_1 e A_2 vanno determinate dalle condizioni iniziali, in analogia col caso di sovrasmorzamento; la legge oraria diventa quindi, imponendo le opportune condizioni iniziali:

$$x(t) = \left(x_0 + v_0 t + \frac{\omega_S x_0 t}{2}\right) e^{-\frac{\omega_S}{2}t}$$

Come si vede dalla figura il sistema, sebbene sia in grado di dare inizio alla prima oscillazione, la vede smorzarsi completandola solo all'infinito.

$$\lim_{t\to\infty} x = 0$$

È un caso notevole poiché restituisce la massima velocità di smorzamento, e viene come tale utilizzata negli strumenti di misura analogici come i galvanometri.

Sovrasmorzamento $\Delta > 0$

Si verifica quando $\omega_S > 2\omega_N$; in tal caso la soluzione dell'equazione differenziale del moto fornisce la legge oraria:

$$x(t) = A_1 e^{-|\lambda_1|t} + A_2 e^{-|\lambda_2|t}$$

Le costanti A_1 e A_2 si determinano imponendo che la soluzione soddisfi le condizioni iniziali

$$x(0) = x_0$$

e

$$\dot{x}(0) = v_0$$

ovvero che all'istante iniziale il punto si trovi nella posizione di elongazione e con velocità pari a quelle iniziali note. Si ottiene:

$$A_1 = \frac{v_0 + x_0|\lambda_1|}{|\lambda_1| - |\lambda_2|}$$

$$A_2 = \frac{-x_0|\lambda_2| - v_0}{|\lambda_1| - |\lambda_2|}$$

Dal punto di vista fisico questa soluzione indica che lo smorzamento viscoso è tanto alto da impedire qualunque oscillazione del punto attorno alla posizione di equilibrio $x = 0$.

Moto armonico forzato semplice

Il **moto armonico forzato semplice** è detto anche **moto armonico risonante**. Si vuole ora dimostrare come una accelerazione con variazione temporale sinusoidale $a_F = a_{F0}\cos(\omega_F t)$ provochi un'oscillazione forzata. L'equazione del moto è quindi:

$$\ddot{x} = a_F + a_H = a_{F0}\cos(\omega_F t) - \omega_N^2 x \quad \rightarrow \quad \ddot{x} + \omega_N^2 x = a_{F0}\cos(\omega_F t)$$

L'ampiezza delle oscillazioni è determinata da:

$$A = \frac{a_{F0}}{\omega_N^2 - \omega_F^2}$$

La forzante influisce attraverso due parametri:

- il cosiddetto **spostamento statico**, la variazione di ampiezza iniziale che sarebbe il solo se l'accelerazione fosse costantemente a_{F0}:

$$A_N = \frac{a_{F0}}{\omega_N^2},$$

- **l'amplificazione dinamica**, che rappresenta appunto l'incremento relativo subito dallo spostamento statico per effetto della variazione della forza nel tempo.

All'inizio il corpo mantiene la sua frequenza naturale di oscillazione ω_N, ma viene progressivamente costretto a seguire la frequenza ω_F imposta dalla forza esterna, e acquisisce quindi al ciclo limite ampiezza e legge oraria:

$$A_F = \frac{a_{F0}}{\omega_F^2}.$$
$$x = A\cos(\omega_F t)$$

sostituendo nell'equazione del moto:

$$-A\omega_F^2\cos(\omega_F t) + \omega_N^2 A\cos(\omega_F t) = a_{F0}\cos(\omega_F t)$$

$$-A\omega_F^2 + A\omega_N^2 = a_{F0}$$

$$A\left(\omega_N^2 - \omega_F^2\right) = a_{F0} \text{ q.e.d.}$$

Da questa relazione è evidente che esistono tre comportamenti anche per il moto forzato, stavolta in base al rapporto fra le frequenze.

Sottoforzamento

- $\omega_F \ll \omega_N \quad \Rightarrow \quad A \to A_F$ (risonanza armonica sfasata: distruttiva decrescente col rapporto)

Forzamento critico

- $\omega_F = \omega_N \quad \Rightarrow \quad A \to \infty$ (risonanza armonica smorzante)

Sovraforzamento

- $\omega_F \gg \omega_N \quad \Rightarrow \quad A \to 0$ (risonanza armonica in fase: costruttiva crescente col rapporto)

Moto armonico forzato smorzato

Il **moto armonico forzato smorzato** è anche detto **moto armonico generico**, poiché ne costituisce il caso più generale. Si tratta del caso visto nella sezione precedente con in aggiunta un termine oscillante che dipende sinusoidalmente dal tempo, e fornendo energia al sistema, si oppone al suo ritorno alla posizione di equilibrio X=0:

$$\ddot{x} + \omega_S\dot{x} + \omega_N^2 x = a_{0F}\cos(\omega_F t)$$

Ancora una volta facciamo riferimento alla teoria delle equazioni differenziali del second'ordine per la risoluzione: la seguente è la legge oraria dell'elongazione **x**:

$$x(t) = Ae^{-\frac{\omega_S}{2}t}\cos(\omega_S t + \phi) + B\cos(\omega_F t - \delta)$$

dove:

$$\delta = \arctan\left(\frac{\omega_S\omega_F}{\omega_N^2 - \omega_F^2}\right)$$

$$B = \frac{a_0}{\sqrt{(\omega_N^2 - \omega_F^2)^2 + \gamma^2\omega_F^2}}$$

Si osservi che il moto totale è la somma dei due moti trattati precedentemente: uno oscillante smorzato con una certa pulsazione ω_S ed uno forzato di ampiezza B e pulsazione ω_F.
Il sistema ha dunque un transiente oscillante iniziale che svanisce esponenzialmente col tempo, lasciando il posto ad un'oscillazione pura ad ampiezza costante; questa oscillazione è determinata essenzialmente dalla forza esterna, e presenta uno sfasamento con essa. Se la resistenza viscosa ω_S diventa sempre più piccola, l'ampiezza massima B_{max} aumenta sempre di più (tendendo all'infinito per ω_S che tende a zero). Si parla allora di **sfasamento**.

La curva di sfasamento a destra (la curva della funzione $\delta\left(\omega_f\right)$) mostra che elongazione e accelerazione non sono mai in fase tranne nel caso degenere in cui $\omega_F = 0$ cioè di moto armonico smorzato). Per $\omega_F = \omega_N$ (in risonanza), l'elongazione si dice in **quadratura di fase** con la forza esterna.

Sistemi equivalenti

Gli oscillatori armonici si manifestano in una vastità di aree fisiche: qui presentiamo una tavola che mostra le analogia tra quantità proprie di quattro oscillatori armonici meccanici ed elettronici. Perciò se presentano grandezze corrispondenti uguali allora uguali saranno anche i loro comportamenti, cioè frequenza risonante, fattore di smorzamento, ecc.

Meccanico traslazionale	Meccanico rotazionale	Circuito RLC in serie	Circuito RLC in parallelo
Posizione x	Angolo θ	Carica q	Tensione elettrica e
Velocità $\frac{dx}{dt}$	Velocità angolare $\frac{d\theta}{dt}$	Intensità di corrente $\frac{dq}{dt}$	Variazione della tensione elettrica $\frac{de}{dt}$
Massa M	Momento d'inerzia I	Induttanza L	Capacità elettrica C
Modulo di Young K	Costante torsionale μ	Elastanza $1/C$	Suscettanza $1/L$
coefficiente d'Attrito C_F	coefficiente d'Attrito torsionale C_T	Resistenza R	Conduttanza $1/R$
Forza guida $F(t)$	Torsione guida $\tau(t)$	Tensione elettrica e	Variazione di corrente di/dt
Frequenza di risonanza non smorzata f_n:			
$\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{M}}$	$\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{I}}$	$\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}}$	$\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}}$
Equazione differenziale:			
$M\ddot{x} + C_F\dot{x} + Kx = F$	$I\ddot{\theta} + C_T\dot{\theta} + \mu\theta = \tau$	$L\ddot{q} + R\dot{q} + q/C = e$	$C\ddot{e} + \dot{e}/R + e/L = \dot{i}$

Note

1. ^ Mazzoldi, *op. cit.*, p. 18
2. ^ [a] [b] Mazzoldi, *op. cit.*, p. 19

Bibliografia

- Paolo Mazzoldi, Massimo Nigro, Cesare Voci, *Fisica* (http://books.google.it/books?id=O6s7AAAACAAJ), vol. 1, 2ª ed., Edises, 2000. ISBN 8879591371.

Voci correlate

- Oscillatore armonico quantistico
- Moto armonico parametrico
- Anarmonicità
- Teoria delle piccole oscillazioni
- Oscillatore
- Ciclo limite
- Risonanza (fisica)
- Molla
- Pendolo semplice

Altri progetti

- **Commons (//commons.wikimedia.org/wiki/Pagina_principale?uselang=it)** contiene immagini o altri file su **Moto armonico (//commons.wikimedia.org/wiki/Category:Harmonic_oscillators?uselang=it)**

Collegamenti esterni

- (EN) Simulatore di oscillazioni forzate non smorzate (http://www.walter-fendt.de/ph14e/resonance.htm)

Portale Meccanica: accedi alle voci di Wikipedia che trattano di meccanica

Categoria: Tipologie di moto | [altre]

- Questa pagina è stata modificata per l'ultima volta il 10 mar 2014 alle 23:47.
- Il testo è disponibile secondo la licenza Creative Commons Attribuzione-Condividi allo stesso modo; possono applicarsi condizioni ulteriori. Vedi le Condizioni d'uso per i dettagli. Wikipedia® è un marchio registrato della Wikimedia Foundation, Inc.

LEZ. 11 LA CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

Leggi di conservazione
Energia potenziale ed
energia cinetica
di un sistema isolato
Esempi
Equilibrio

LE LEGGI DI CONSERVAZIONE

Sistema isolato → quantità di moto ~~totale~~ totale
(la massa totale per la sua velocità)

Le molte proprietà rimangono invariate

Energia totale

$E = \text{costante}$

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{tot} = 0$$

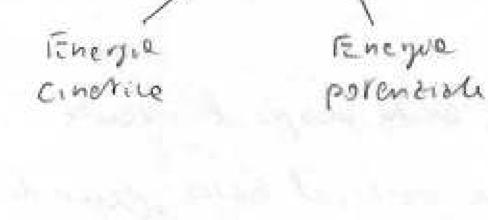
quantità di moto totale

$\vec{P} = \text{costante}$

ENERGIA POTENZIALE ED ENERGIA CINETICA IN UN SISTEMA ISOLATO

$$E = \underset{\text{Energia cinetica}}{T} + \underset{\text{Energia potenziale}}{U} = \text{costante}$$

LA VELOCITÀ AL FONDO DI UNO SCIVOLO



(Questo sistema comprende la terra, ed è un sistema isolato)
ATTRITO = 0
CUBETTO rigido

Ci chiediamo quanto vale la velocità del cubetto in fondo allo scivolo, ponendo che l'attrito è nullo e che il cubetto si trova ad una altezza h.

Potremmo risolvere questo esercizio usando le leggi del moto. Potremmo scrivere la forza, scomporla lungo il piano di discesa e perpendicolarmente al piano, scrivere il I° principio della dinamica, ricavarne l'accelerazione, risolvere, integrare l'equazione; insomma avremmo un moto uniformemente accelerato date le condizioni iniziali potremmo calcolare la velocità finale.

Ma possiamo anche arrivare alle risposte in modo più rapido dal punto di vista matematico, sfruttando il principio di conservazione dell'energia.

situazione iniziale

$U_i = mgh$ il cubetto è posizionato in cima alla discesa

$T_i = 0$ l'energia cinetica all'istante iniziale è 0, la velocità è 0.

Dal momento che il cubetto è posato, il sistema diventa isolato, mentre prima non lo era.

$$E = U_i = mgh$$ Energia totale

L'energia totale non dovrà cambiare; anche dopo l'istante iniziale il cubetto comincerà a scivolare verso il basso, quindi la sua energia cinetica aumenterà, però l'energia totale non deve cambiare. Quindi l'energia cinetica aumenterà a spese dell'energia potenziale gravitazionale che diminuirà in modo corrispondente.

Situazione finale

$W_f = 0$

↳ l'energia potenziale gravitazionale è proporzionale a un dislivello, in questo caso al livello del pavimento. Quindi in fondo al pavimento l'energia potenziale gravitazionale si è ridotta a 0. Al contrario dell'energia cinetica, che è al valore massimo $T_f = \frac{1}{2} m v_f^2$

$$T_f = \frac{1}{2} m v_f^2$$

↳ Energia cinetica. L'energia totale finale è pari a T_f: $E = T_f$

Per conoscere il modulo della velocità finale, sfruttiamo la conservazione dell'energia. Cioè il fatto che l'energia totale alla fine deve essere uguale a quella che c'era all'inizio o quella che c'è in qualunque fase intermedia.

In pratica

$$E = W_i = T_f$$

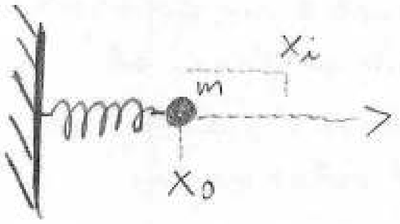
e questo ci consentirà di estrarre dalle equazioni la nostra incognita che è v_f, ovvero:

$$\cancel{m} g h = \frac{1}{2} \cancel{m} v_f^2$$

$$v_f = \sqrt{2gh}$$ equivalente alla caduta lungo la verticale

VELOCITÀ DI UN OGGETTO ALL'ESTREMITÀ DI UNA MOLLA

su un piano orizzontale, per cui il peso è come se non ci fosse



La molla ha una lunghezza di riposo, questa posizione è definita come x_0.

Se si tira la massa m verso l'esterno, tendendo la molla, arriveremo ad un'altra posizione, indicata con x_i.

La condizione iniziale è questa, alla posizione x_i. Una volta che lasciamo andare la massa, il sistema rimarrà isolato e il principio di conservazione dell'energia sarà pienamente operante.
Avremo ~~un~~ moto oscillatorio.
Quanto vale la velocità che la massa m ha nel momento in cui, durante le oscillazioni, ripassa per il punto x_0, in cui la molla non è né compressa, né estesa.
Si potrebbe rispondere con le equazioni del moto, con un calcolo relativamente complicato, ma facciamo molto prima ad utilizzare il principio di conservazione dell'energia.

SITUAZIONE INIZIALE:

$$U_i = \frac{1}{2} k \underbrace{(x_i - x_0)}_{\text{Elongazione}}^2$$

ENERGIA POTENZIALE ELASTICA, NON C'È ENERGIA CINETICA, PERCHÉ TUTTO È FERMO.

$$T_i = 0$$

$$E = U_i = \frac{1}{2} k (x_i - x_0)^2$$

Energia totale iniziale = a quella finale, per il principio di conservazione dell'energia.

IN UNA POSIZIONE GENERICA, UNA CONDIZIONE INTERMEDIA

$$\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k (x - x_0)^2 = E = U_i = \frac{1}{2} k (x_i - x_0)^2$$

Da questa possiamo ricavare quando dal punto x passiamo al punto x_0:

Per $x = x_0$, la velocità sarà quella nel punto x_0 e, volendo, possiamo chiamarla v_0:

$$m v_0^2 = K (x_i - x_0)^2$$ da cui, risolvendo

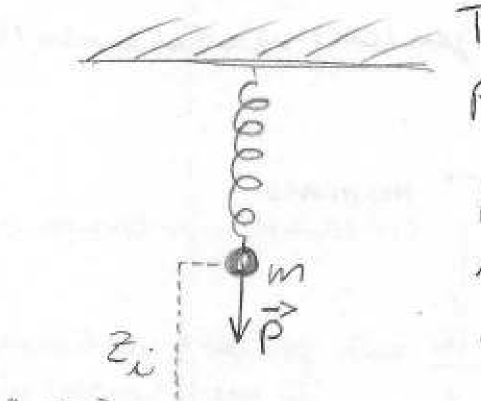
$$v_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \underbrace{(x_i - x_0)}$$

elongazione iniziale, che può essere >0 o <0 a seconda che la molla sia tirata o compressa.

Si noti che in questo caso, a differenza dell'esempio dello scivolo, la massa è presente come parametro.
k è l'elasticità della molla: una molla rigida dà luogo a velocità più grande.
Una massa più grande comporta una velocità più bassa

Tre diverse energie

POSSIAMO METTERE INSIEME L'ENERGIA POTENZIALE GRAVITAZIONALE, QUELLA ELASTICA E QUELLA CINETICA.
L'esempio è di avere una massa m appesa ad una molla ad un soffitto.



Tirando la molla ci aspettiamo oscillazioni verticali. Fino ad un minimo di posizione verso l'alto, poi di nuovo verso l'alto e così via per un po'.
Attriti trascurabili.
La condizione $z_i > z_0$ indica che la condizione iniziale è diversa dalla condizione di equilibrio tra la forza peso e la forza elastica.

Energia Totale: $E = W_{GRAV} + W_{ELAST} + T_{CIN}$

E Potenziale — Energia Potenz. Elastica — Energia cinetica

Condizione iniziale: $E = mgz_i + \frac{1}{2}k(z_i - z_0)^2$

(la massa è a riposo, è ferma, quindi T, l'energia cinetica iniziale è 0)

Configurazione generica:

derivata rispetto al tempo invece di v^2

$$\underbrace{mgz_i + \frac{1}{2}k(z_i - z_0)^2}_{\text{Energia totale iniziale}} = E = \underbrace{\underbrace{mgz}_{\substack{\text{Energia potenziale}\\ \text{gravitazionale per la}\\ z \text{ generica}}} + \underbrace{\frac{1}{2}k(z - z_0)^2}_{\substack{\text{Termine di energia potenziale}\\ \text{elastica in cui } z \text{ non è né } z_i \text{ né } z_0,\\ \text{è un valore intermedio}}} + \underbrace{\frac{1}{2}m\dot{z}^2}_{\text{Energia cinetica}}}_{\substack{\text{Questa quantità è l'energia totale, che deve essere uguale}\\ \text{a quella iniziale}}}$$

Per $z = z_0$ possiamo calcolare la velocità quando la molla non è estesa.

Oppure ci possiamo chiedere quale sia la condizione di equilibrio. Essa è quella in cui l'energia cinetica è nulla, la forza peso e la forza elastica si compensano mutuamente.

Condizione di equilibrio: $\sum W_{POT} \to$ minimo (IN CONDIZIONI DI EQUILIBRIO)

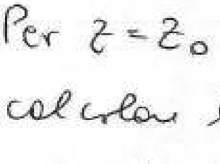
ENERGIA POTENZIALE

$$\frac{\partial W}{\partial z} = 0$$

per dire condizione di energia potenziale minima, come nel caso della palla nella buca. Esempio a sinistra, meglio lo derivo secondo.

$$mg + k(z - z_0) = 0$$

$$z_0 = -\frac{g}{k}m + z$$



non in equilibrio; c'è voluto un lavoro

equilibrio, l'energia totale è solo potenziale

DOVE C'È L'EQUILIBRIO, L'ENERGIA POTENZIALE È MINIMA

equilibrio instabile, dove l'energia potenziale è massima

IN GENERALE

$$-\frac{\partial W}{\partial x} = F_x$$

(ottengo la componente x della forza applicata al sistema)

perché è una forza esterna che si contrappone a quelle interne

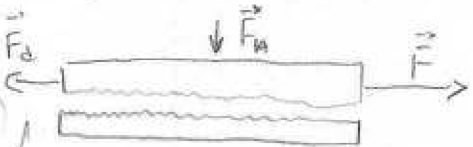
e le altre derivate parziali y e z sono tutte nulle
Se la forza totale non è 0 esistono delle componenti e queste 3 componenti sono misurate dalle derivate parziali dell'energia potenziale rispetto alle 3 coordinate.

11.8

LEZ. 12 L'ATTRITO

Interazioni per contatto superficiale; attrito radente
La forza d'attrito
Dissipazione dell'energia (causato dall'attrito radente)
Prof. Angelo Tartaglia
40'47

LE INTERAZIONI PER CONTATTO SUPERFICIALE E L'ATTRITO RADENTE



forza di attrito che si oppone al movimento di una parte rispetto all'altra.

coeff. di attrito radente, dipende dal materiale delle superfici a contatto

Forza normale

$$F_a \leq \mu F_n$$

Indipendente dall'area

indipendente dall'area

valore massimo, proporzionale alla spinta normale alla superficie.

È la componente normale a dare il valore massimo della Forza di attrito, anche per spinte non perpendicolari.

La componente parallela al pavimento è quella che rende al movimento.

La forza di attrito è indipendente dalla superficie di contatto.

Forza di trazione

$$\vec{a} \neq 0 \quad \text{se} \quad \frac{F}{F_n} \geq \mu_s$$

Attrito statico

coefficiente di attrito statico

applicazione I° principio dinamica, è un moto

$$\vec{a} = \frac{1}{m}(F - \mu F_n)\,\hat{u}$$

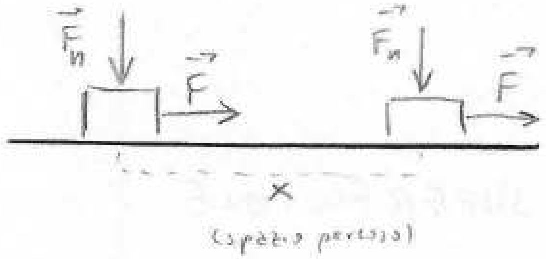
attrito dinamico

l'attrito durante il movimento è inferiore a quello occorso per iniziare il movimento,

$\mu \leq \mu_s$

DISSIPAZIONE DI ENERGIA

Lavoro delle forze di attrito



Posso calcolare il lavoro:

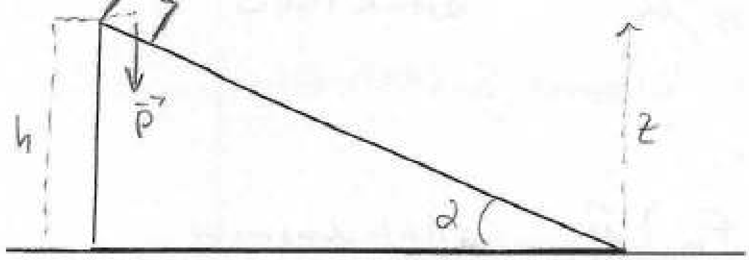
$$L_{ATTRITO} = - F_a x = - \mu_d F_n x$$

lavoro — calore — attrito dinamico

IL LAVORO FATTO DALLA FORZA DI ATTRITO È NEGATIVO, QUINDI VA A SOTTRARRE ENERGIA AL SISTEMA CONSIDERATO.

La forza d'attrito produce un lavoro negativo che riduce l'energia a disposizione del sistema convertendola in un'altra forma di energia, energia termica.
L'energia è rigorosamente conservata, ma si ha una conversione da una forma ad un'altra che è la forma termica.

Caso di UN OGGETTO CHE SCIVOLA SU UN PIANO INCLINATO

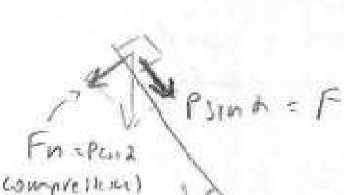


$\mu_d \; \mu_s \neq 0$

$F = P \sin \alpha$ = Forza motrice

$F_n = P \cos \alpha$

per cominciare a scivolare



Scomposizione della forza peso

$$F = P \sin \alpha = \mu_s F_n = \mu_s P \cos \alpha$$

Quindi cominciamo ad avere il movimento quando

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha = \mu_s$$

Quando α è grande abbastanza, aumenta la pendenza ed ad un certo punto l'oggetto scivola.

Possiamo anche qui ragionare in termini di energia:

Energia iniziale : $E_i = \overset{\text{il peso}}{\widetilde{mg}}h = Ph$ = Energia totale
(coincidente con l'energia gravitazionale potenziale).

Durante il moto : $E = mgz + \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\text{Energia cinetica}} = E_i + L_{ATTRITO} \leq E_i$

L'energia si dissipa:

L'ENERGIA MECCANICA, CINETICA E GRAVITAZIONALE SI DISSIPA, CIOÈ VIENE CONVERTITA IN CALORE E NON VIENE PIÙ RECUPERATA IN FORMA DI ENERGIA MECCANICA. PRODURRÀ ALTRI EFFETTI MA NON PIÙ MOTO COME AVVENIVA PRIMA.

Questa conversione irreversibile è quanto corrisponde al concetto di dissipazione

L'attrito è un fenomeno dissipativo, che converte energia da forme ~~diverse~~ ad. es. di tipo meccanico, cinetico e potenziale in forme termiche

La stessa espressione di prima esplicitando il lavoro compiuto dalla forza di attrito:

$$mgz + \frac{1}{2}mv_{\parallel}^2 = \underbrace{mgh}_{\text{energia iniziale}} - \overbrace{\mu_{\text{dinamico}}\, mg\cos\alpha \boxed{\frac{h-z}{\sin\alpha}}}^{\text{Lavoro di attrito}}$$

→ spazio percorso

le due sbarrette per mettere in evidenza che la velocità di cui stiamo parlando è una v parallelo alla direzione del piano

12.3

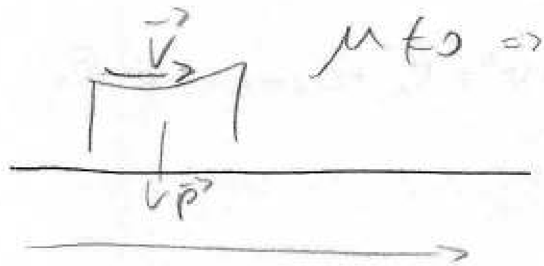
Al fondo della china:

$$\underbrace{\frac{1}{2}v_{//f}^2}_{\substack{\text{energia}\\\text{cinetica}\\\text{(quella potenziale 0)}}} = \underbrace{gh}_{\substack{\text{energia}\\\text{iniziale}}} - \underbrace{\overset{\text{coeff. d'attrito dinamico}}{\mu}\, gh \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}_{\substack{\text{energia}\\\text{dissipata}\\\text{dall'attrito}}}$$

(La stessa senza l'attrito:

$$v_{//f} = \sqrt{2gh\left(1-\mu\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)}$$)

Dissipazione della quantità di moto



$\mu \neq 0 \Rightarrow$ c'è attrito

$$E = \underbrace{\frac{1}{2}m\dot{x}_0^2}_{\substack{\text{Energia}\\\text{cinetica}\\\text{dell'istante}\\\text{iniziale}}} - \underbrace{\mu m g (\overset{\text{spazio percorso}}{x - x_0})}_{\substack{\text{Energia dissipata}\\\text{dalla forza di}\\\text{attrito}}} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

In quale punto l'energia cinetica finale è nulla?

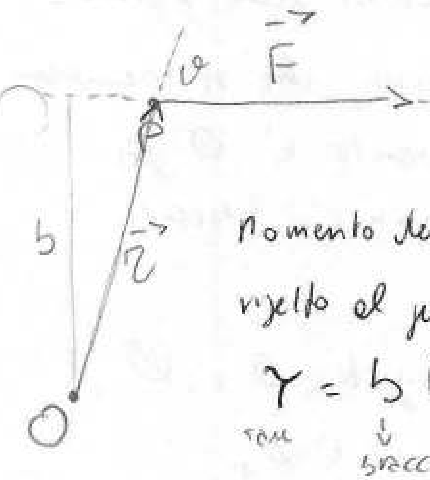
$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}_0^2 - \mu m g (\underset{x\text{ finale}}{x_f} - x_0) = \underset{\text{al fondo}}{0}$$

$$l = (x_f - x_0) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\dot{x}_0^2}{\mu g}$$ SPAZIO PERCORSO IN FUNZIONE della vel. iniziale

LEZ. 13 IL CORPO RIGIDO

- Momento di una forza rispetto ad un punto
- Il centro delle forze
- Coppia di forze
- Il centro di massa

MOMENTO DI UNA FORZA RISPETTO AD UN PUNTO



Forza $\vec{F}$ applicata nel punto P. In tratteggio la retta di azione della forza.
Un punto O e sia b la distanza del punto O dalla retta di azione della forza

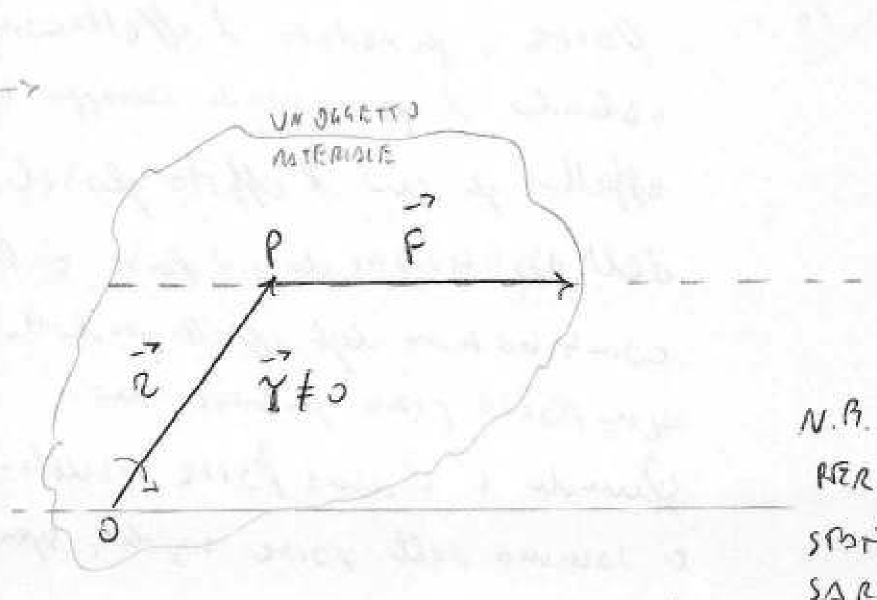
Momento della forza rispetto al punto O:

$$\underset{\text{TAU}}{\tau} = \underset{\text{BRACCIO}}{b} F \quad \text{(modulo)}$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

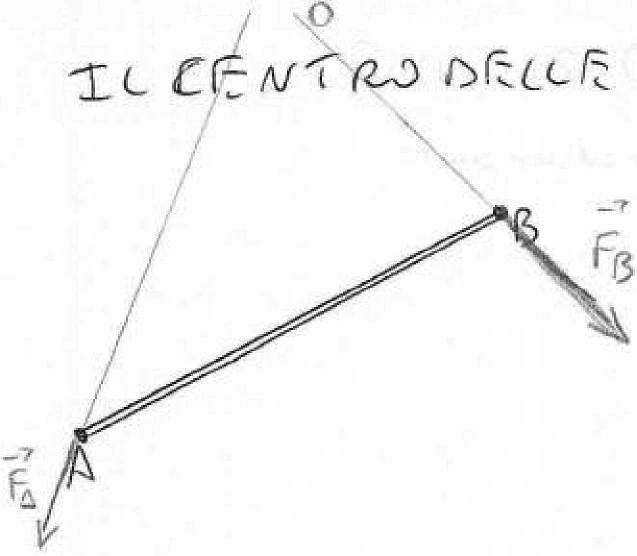
↳ IL MOMENTO DI UNA FORZA RISPETTO AD UN PUNTO DATO È DATO DAL PRODOTTO ESTERNO DI r PER b

$$b = r \sin\vartheta$$



N.B. SE $\vec{F}$ FOSSE PASSATO PER O IL MOMENTO SAREBBE STATO Ø PERCHÈ NON CI SAREBBE STATO BRACCIO.

IL CENTRO DELLE FORZE (per un n° arbitrario di forze)

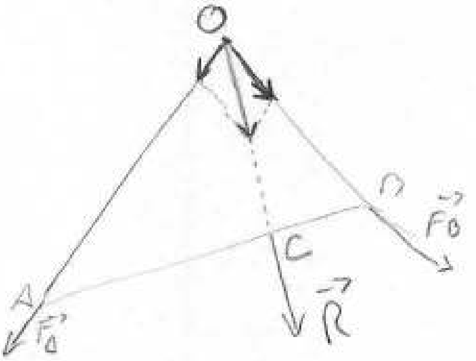


Consideriamo una sbarra i cui estremi sono contrassegnati con A e B e consideriamo due forze, una applicata nel punto A e una applicata nel punto B.

Per il calcolo dei momenti conta la retta d'azione della forza.

Disegniamo le due rette di azione, che si incontrano nel punto O in cui il momento è Ø per entrambe le forze, in quanto non c'è braccio.

Il momento della forza F_A rispetto a O è Ø; il momento della forza F_B rispetto a O è Ø, perché le rette di azione delle due forze passano per il punto O.



$$\vec{R} = \vec{F}_A + \vec{F}_B$$
$$\vec{\tau} = \emptyset$$

Immaginiamo di spostare entrambe le forze verso il punto O, per vedere quale è la risultante delle due forze; per vedere l'effetto complessivo, valendo il principio di sovrapposizione degli effetti per cui l'effetto globale derivante dall'applicazione di più forze è la combinazione degli effetti prodotti da ogni forza presa per conto suo.
Quindi c'è una forza risultante che è somma delle forze singole, separate.

Se l'oggetto fosse stato puntiforme, tutto finiva qui.

La risultante deve avere lo stesso effetto delle due forze applicate alla sbarra e la risultante stessa deve essere applicata alla sbarra. In quale punto?

Prolungando la retta d'azione della risultante troviamo sulla sbarra il punto C ed immaginiamo di applicare in C la risultante $\vec{R}$. Quello che succede alla sbarra è lo stesso di quello che succederebbe applicando le due forze $\vec{F_A}$ e $\vec{F_B}$.

Se applicassi $\vec{R}$ in qualunque altro punto della sbarra, non avrei più un momento totale delle forze nullo rispetto ad O; un momento torcente nullo rispetto a O.

$\vec{R}$ applicato nel punto C continua a produrre un momento nullo rispetto ad O, perché C è stato individuato proprio utilizzando la retta d'azione della risultante.

C è il centro delle forze ed è un centro che viene individuato mediante la proprietà che è quella di dar luogo ad un momento risultante rispetto al punto C stesso che è nullo.

F_A e F_B tendono entrambe a far ruotare l'oggetto, se prese separatamente, insieme lo spostano e il momento torcente di R è nullo perché compensa i due momenti di F_A e F_B

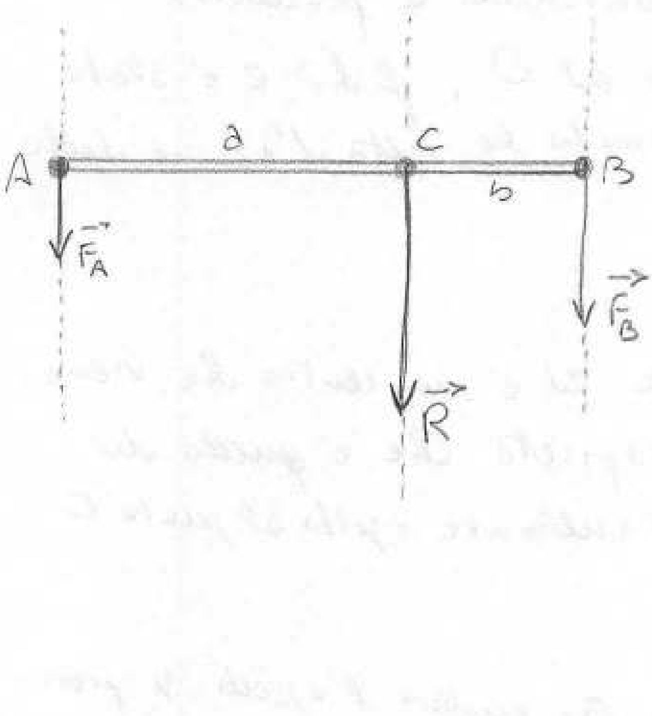
IL CENTRO DELLE FORZE È QUEL PARTICOLARE PUNTO TALE CHE, SE APPLICATA IN QUEL PUNTO LA RISULTANTE DELLE FORZE, SI PRODUCE ESATTAMENTE LO STESSO EFFETTO CHE LE FORZE SEPARATAMENTE AVREBBERO PRODOTTO.

È UN PUNTO TALE PER CUI IL MOMENTO TOTALE DELLE FORZE APPLICATE RISPETTO AL PUNTO È NULLO

ALTRA DEF.:

IL CENTRO DELLE FORZE È QUEL PARTICOLARE PUNTO TALE PER CUI LA SOMMA DEI MOMENTI DELLE FORZE APPLICATE AL CORPO IN ESAME RISPETTO A QUEL PUNTO È Ø.

Vediamo il caso in cui le rette di azione delle due forze siano parallele: in questo caso il punto O di intersezione tende a ∞.



Però continua ad essere possibile individuare un punto C, che è il centro delle forze, la cui retta di azione in cui applicare la risultante è parallela alle altre due. La risultante è la somma delle altre due forze.

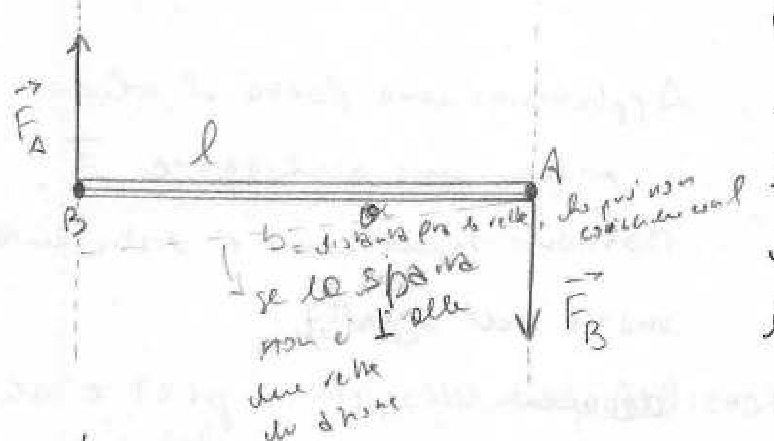
Vale la seguente equivalenza:

$$\frac{F_a}{F_b} = \frac{b}{a}$$

e questa proporzione individua il centro delle forze quando esse sono parallele tra loro.

COPPIA DI FORZE

due forze discordi ma parallele



Una coppia di forze è fatta da due forze uguali in modulo, applicate lungo due direzioni parallele tra di loro, una inversa all'altra.

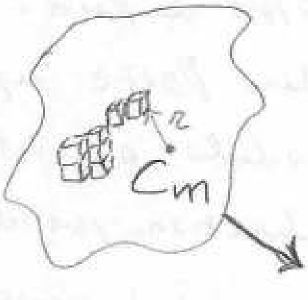
La somma di questi due vettori è Ø, quindi non c'è nessun punto a cui applicare un vettore nullo, non ha senso.
Non possiamo parlare di un centro delle forze localizzato.
Però possiamo parlare di un momento delle forze.
Non esiste alcun punto rispetto a cui il momento delle forze diventa Ø.
Non esiste un centro delle forze; non è possibile annullare il momento di questa coppia di forze; il momento della coppia di forze è:

$$\vec{F}_A = -\vec{F}_B$$
$$R = 0$$

momento torcente associato alla coppia di forze : $\tau = F \cdot l \cdot \sin\theta = Fb$

Una volta individuate queste grandezze possiamo generalizzare il concetto e passare al concetto di centro di massa.

IL CENTRO DI MASSA



Applichiamo una forza al solido: si produce una accelerazione $\vec{a}$. Possiamo sapere come è distribuita la massa nell'oggetto.

Cm = centro di massa, dal quale posso determinare tutti gli elementi infinitesimi del solido, tramite un vettore r.

La densità di massa dell'oggetto è $\rho(r)$ e vale la relazi[one] $\rho(r_0)$

$$dm = \rho(r)\,dV \quad \text{(discretizzazione)}$$

↑ infinitesim[o]

Il centro di massa è scelto con lo stesso criterio di scelta del centro delle forze. La forza a cui possiamo fare riferimento è la forza di inerzia.
Se applico una spinta ad un oggetto esso è costretto a muoversi di moto accelerato e io sento una resistenza dell'oggetto alla mia spinta.
L'oggetto resiste in proporzione all'accelerazione a cui lo costringo e in proporzione alla massa dell'oggetto stesso.
Questa reazione è la forza di inerzia.

Per ogni elemento del solido avrò una reazione di inerzia che sarà data dal prodotto della massa dm per l'accelerazione a cui è sottoposto l'elemento. Avrò quindi molte forze di inerzia, applicate ad ogni elemento, rappresentato da un cubetto. Tutte queste forze insieme possono essere ricondotte ad una risultante e la risultante deve essere applicata ad un punto, che è il centro delle forze, delle forze di inerzia. Quindi il centro delle forze di inerzia è il centro di massa.

Possiamo dire che la forza di inerzia produce effetti che sono immaginabili come dovuti ad una forza concentrata in un unico punto, il centro di massa, anche se in realtà la forza di inerzia è distribuita ad ogni elemento di massa del corpo.

La formalizzazione del concetto è così espressa:

$$\int_{oggetto} \underbrace{\rho(\vec{r})\, dV}_{\text{massa di un cubetto}} \, \vec{r} \wedge \vec{a} = 0$$

questa è la formula da applicare per trovare Cm

massa di un cubetto $\cdot\, a$ = forza di inerzia di un cubetto costretto ad accelerare.

$\vec{r} \wedge$ alla forza esterno

definizione di momento torcente intorno alla forza rispetto ad un certo punto

$\int_{oggetto} \ldots$ dà il momento torcente totale delle forze di inerzia rispetto ad un qualche punto. Quello speciale punto per cui viene 0 è il centro di massa Cm.

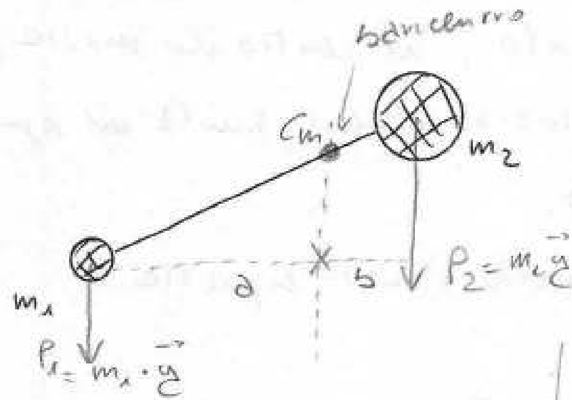
La soluzione all'equazione è il centro di massa.

IL BARICENTRO

è il corrispondente al Cm, che abbiamo individuato rispetto all'inerzia, sempre presente e legata alla distribuzione di materia.
Qui si prende in considerazione una forza sempre presente sulla Terra: la forza peso, che è anch'essa proporzionale alla massa.

È IL CENTRO DELLE FORZE DI GRAVITAZIONE, ovvero il centro delle forze peso, che coincide con il centro di massa perché il peso è proporzionale alla massa.

Consideriamo due masse sferiche collegate con una sbarra, di massa trascurabile:



Abbiamo quindi un oggetto finale composto dai 3 oggetti. Ci chiediamo se ha un baricentro e dove è localizzato.

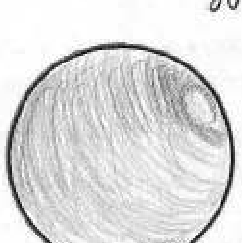
Il baricentro, coincidente con il centro di massa, sarà il centro delle forze applicate.

Le due forze peso sono parallele e disuguali e il centro è calcolabile dalla proporzione:

$$\frac{a}{b} = \frac{m_2}{m_1}$$

e trovo un punto x in cui passa la retta d'azione delle risultante; nel prolungare la retta d'azione trovo una intersezione sulla sbarra, centro del bilanciere, che è il centro di massa o, equivalentemente, il baricentro (o il centro delle forze di inerzia, o il centro delle forze peso) del sistema.

In un oggetto omogeneo, il baricentro è il centro geometrico dell'oggetto.



Per ciascun punto P_i di massa m_i introduciamo le grandezze, misurate in un sistema di riferimento inerziale:

posizione	$\mathbf{r}_i$	*velocità*	$\mathbf{v}_i$
accelerazione	$\mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i / m_i$	*quantità di moto*	$\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i$,
momento angolare	$\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i$	*energia cinetica*	$E_{k,i} = \frac{1}{2} m_i v_i^2$.

Per il sistema complessivo di punti possiamo inoltre definire le grandezze:

quantità di moto totale $\quad \mathbf{P} = \Sigma_i \mathbf{P}_i = \Sigma_i m_i \mathbf{v}_i$,

momento angolare totale $\quad \mathbf{L} = \Sigma_i \mathbf{L}_i = \Sigma_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i$,

energia cinetica totale $\quad E_k = \Sigma_i E_{k,i} = \Sigma_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$.

I momenti angolari vanno riferiti a un polo, che può essere l'origine o un qualsiasi altro punto, fermo o movimento, nel sistema di riferimento inerziale.

5.2 CENTRO DI MASSA DI UN SISTEMA DI PUNTI. TEOREMA DEL MOTO DEL CENTRO DI MASSA.

Si definisce come *centro di massa di un sistema* di punti materiali il punto geometrico la cui posizione è individuata, nel sistema di riferimento considerato, dal raggio vettore

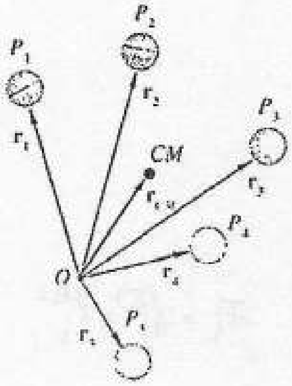


Fig. 5.5

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{\Sigma_i m_i \mathbf{r}_i}{\Sigma_i m_i} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \ldots + m_n\mathbf{r}_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} \quad ; \tag{5.3}$$

le componenti di $\mathbf{r}_{CM}$, ovvero le coordinate del centro di massa in un sistema di coordinate cartesiane con l'origine in O, sono

Centro di massa

$$x_{CM} = \frac{\Sigma_i m_i x_i}{\Sigma_i m_i} \quad , \quad y_{CM} = \frac{\Sigma_i m_i y_i}{\Sigma_i m_i} \quad , \quad z_{CM} = \frac{\Sigma_i m_i z_i}{\Sigma_i m_i} \quad .$$

Si noti che *la posizione* del centro di massa rispetto agli n punti materiali *non dipende dal sistema di riferimento*, mentre le sue coordinate invece variano a seconda del sistema prescelto. In figura 5.6 sono mostrati un sistema di n punti e i centri di due sistemi di riferimento O e O': le posizioni dei punti P_i sono individuate rispettivamente dai raggi $\mathbf{r}_i$ e $\mathbf{r}'_i$ con

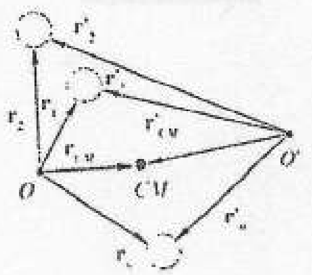


Fig. 5.6

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}'_i + \mathbf{OO'} \quad \text{ovvero} \quad \mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i + \mathbf{O'O} \quad .$$

La posizione del centro di massa rispetto ad O è data da (5.3) e rispetto ad O' da

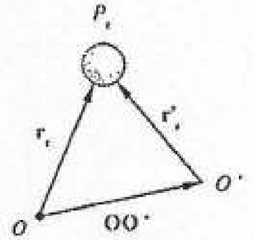


Fig. 5.7

$$\mathbf{r}'_{CM} = \frac{\Sigma_i m_i \mathbf{r}'_i}{\Sigma_i m_i} = \frac{\Sigma_i m_i (\mathbf{r}_i + \mathrm{O'O})}{\Sigma_i m_i}$$

$$= \frac{\Sigma_i m_i \mathbf{r}_i}{\Sigma_i m_i} + \mathrm{O'O} = \mathbf{r}_{CM} + \mathrm{O'O} \quad .$$

Se gli n punti sono in movimento, di norma la posizione del centro di massa varia; sulla base della definizione calcoliamo la velocità del centro di massa:

$P = MV_{CM}$

$$\boldsymbol{v}_{CM} = \frac{d\mathbf{r}_{CM}}{dt} = \frac{\Sigma_i m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}}{\Sigma_i m_i} = \frac{\Sigma_i m_i \boldsymbol{v}_i}{\Sigma_i m_i} = \frac{\mathbf{P}}{M} \quad . \tag{5.4}$$

Quantità di moto totale

Abbiamo utilizzato la definizione di quantità di moto totale del sistema data nel paragrafo 5.1 e chiamato $M = \Sigma_i m_i$ la massa totale del sistema. Vediamo quindi che P *coincide con la quantità di moto* $M\boldsymbol{v}_{CM}$ *del centro di massa, considerato come un punto materiale che abbia la posizione* $\mathbf{r}_{CM}$, *la velocità* $\boldsymbol{v}_{CM}$ *e massa pari alla massa totale M del sistema.*

Analogamente possiamo ricavare l'accelerazione del centro di massa, derivando (5.4):

$$\boldsymbol{a}_{CM} = \frac{d\boldsymbol{v}_{CM}}{dt} = \frac{\Sigma_i m_i \frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt}}{\Sigma_i m_i} = \frac{\Sigma_i m_i \boldsymbol{a}_i}{\Sigma_i m_i} = \frac{\Sigma_i m_i \boldsymbol{a}_i}{M} \tag{5.5}$$

Se il sistema di riferimento è inerziale

$$m_i \boldsymbol{a}_i = \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(E)} + \mathbf{F}_i^{(I)}$$

$F_i = F_i^{(I)} + F_i^{(E)}$

secondo (5.1). Sostituendo in (5.5)

$$M\boldsymbol{a}_{CM} = \Sigma_i m_i \boldsymbol{a}_i = \Sigma_i (\mathbf{F}_i^{(E)} + \mathbf{F}_i^{(I)}) = \mathbf{R}^{(E)} + \mathbf{R}^{(I)} = \mathbf{R}^{(E)} \, ,$$

dato che la risultante (5.2) delle forze interne è nulla. La relazione

Teorema del moto del centro di massa

$$\mathbf{R}^{(E)} = M\,\boldsymbol{a}_{CM} \tag{5.6}$$

esprime il *teorema del moto del centro di massa. Il centro di massa si muove come un punto materiale in cui sia concentrata tutta la massa del sistema e a cui sia applicata la risultante delle forze esterne.*

Utilizzando le (5.4) e (5.6) si ha inoltre

$$\mathbf{R}^{(E)} = M\,\boldsymbol{a}_{CM} = M\,\frac{d\boldsymbol{v}_{CM}}{dt} = \frac{d}{dt}\,(M\,\boldsymbol{v}_{CM}) = \frac{d\mathbf{P}}{dt} \tag{5.7}$$

La risultante delle forze esterne è eguale alla derivata rispetto al tempo della quantità di moto totale del sistema.

IL CENTRO DI MASSA DI UN SISTEMA DI PARTICELLE

Dato un sistema di N particelle, ciascuna individuata nello spazio dalla posizione $\vec{r}_i$ in un s.c.o. e dalla massa m_i, il centro di massa delle particelle è:

$$r_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i r_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$ (ovvero la media pesata per le masse ...

Se $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$ è la massa totale delle N particelle abbiamo:

$$r_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i r_i}{M}$$ e, usando la proiezione sugli assi:

$$x_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i x_i}{M}$$

$$y_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i y_i}{M}$$

$$z_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i z_i}{M}$$

CENTRO DI MASSA DI UN CORPO CONTINUO

Sia ρ la densità del corpo, in funzione della posizione dell'elemento di volume nello spazio:

$$\rho(x, y, z) = \frac{dm}{dV}$$

da cui possiamo ricavare la massa elementare:

$$dm = \rho(x, y, z)\, dV$$

La posizione del centro di massa è calcolabile dividendolo in parti infinitesime e effettuando la media pesata, ovvero

$$z_{cm} = \frac{\int_V z\, dm}{M} = \frac{\int_V z\, \rho\, dV}{M}$$

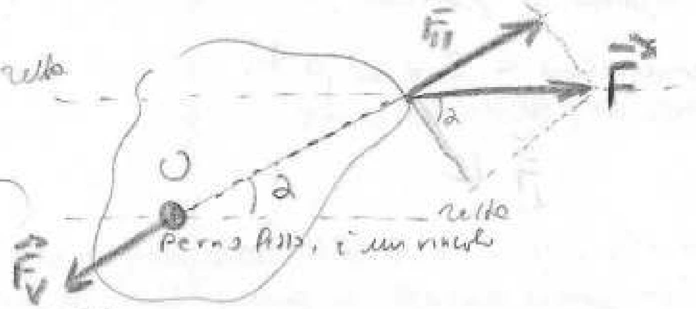
dove l'integrale è esteso a tutto il volume del corpo.

LEZ 14 IL MOMENTO DI INERZIA

Prof. Angelo Farbellie
h2'10"

Rotazione di un oggetto esteso
Il momento angolare
Energia cinetica di rotazione
Il momento di inerzia

ROTAZIONE DI UN OGGETTO ESTESO



$$\vec{F}_V = -\vec{F}_{\parallel}$$

La forza del vincolo, non produce movimento

$$F_m = F_\perp = F \sin\alpha$$

La forza motrice, non bloccata dal vincolo, compatibile col vincolo => movimento in senso orario.

L'oggetto è imperniato

$\vec{F}$ forza applicata, che viene scomposta con la regola del rettangolo in

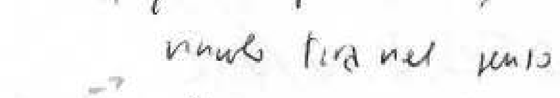
$\vec{F}_{\parallel}$ forza parallela, che produce una reazione nel vincolo. Nel tirare il vincolo tira nel senso opposto:

$\vec{F}_V$ forza del vincolo

$F_\perp$ forza perpendicolare

IL MOMENTO ANGOLARE

Riprendendo in modo semplificato l'esempio precedente.



Abbiamo un oggetto di massa m, con una sbarra vincolata ad un fulcro.
L'oggetto lo consideriamo puntiforme.
La massa della sbarra è trascurabile rispetto a quella dell'oggetto, una sfera ad es.
Immaginiamo che il sistema sia posto in rotazione, con un angolo ϑ che varia nel tempo.

$V = \omega r$
valore numerico

$$\omega = \dot{\vartheta} = \frac{d\vartheta}{dt}$$

La quantità di moto di un oggetto in movimento:

molto piccolo esternamente

$$\vec{p} = m\vec{V} = m\,\vec{\omega}\wedge\vec{r}$$

↳ quantità di moto è $\vec{V}$, $\vec{\omega}$ esterno $\vec{r}$; $\vec{V}$ sarà ⊥ a tutte e due i fattori, sia ω, l'asse attorno a cui avviene la rotazione, sia r, la direzione radiale.

$$p = mV = mr\omega$$

↳ modulo di p, valore numerico

Il momento di quantità di moto, rispetto al fulcro.

Il momento del vettore J (perpendicolare a r e a p):
parallelo all'asse di rotazione

$$\vec{J} = \vec{r}\wedge\vec{p} = m\,\vec{r}\wedge\vec{\omega}\wedge\vec{r}$$

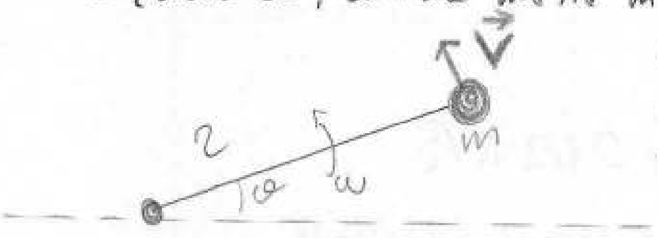
↳ metterebbe in conto il valore del seno di un angolo, che in questo caso vale 1 perché si hanno angoli di $90° = \frac{\pi}{2}$

$$J = rp = mrV = mr^2\omega$$

def. di momento angolare di un oggetto in pura rotazione

ENERGIA CINETICA DI ROTAZIONE

Stesso sistema di prima: sistema in rotazione con una certa velocità angolare ω, con la massa m che ha una certa velocità e quindi una certa energia cinetica.



Per il teorema dell'energia cinetica, a suo tempo dimostrato, si ha la forma dell'energia cinetica di una massa in moto con velocità V, data da $E_c = \frac{1}{2}mV^2$.

IN QUESTO CASO IL MOVIMENTO È UNA ROTAZIONE. LA VELOCITÀ È LEGATA AL VINCOLO DELLA SBARRA INESTENSIBILE IMPERNIATA.

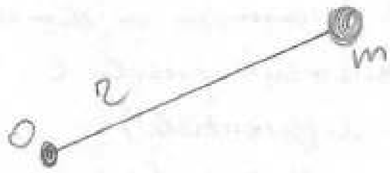
$$V = \omega r$$

$$T = \frac{1}{2}mV^2 \to T_R = \frac{1}{2}mr^2\omega^2$$

↳ ENERGIA CINETICA DI ROTAZIONE

IL MOMENTO DI INERZIA

SI DEFINISCE UNA NUOVA QUANTITA', PARTENDO DAL SOLITO SISTEMA SEMPLIFICATO.



$p = mv$

quantità di moto, in modulo. È la misura dell'inerzia

$J = mr^2\omega$

momento angolare, struttura della formula simile a quella della quantità di moto

Le energie cinetiche:

$$T = \underbrace{\frac{1}{2} m \underbrace{v^2}_{\text{vel. lin.}}}_{\text{L'Ec in funzione della velocità lineare}} = \frac{p^2}{2m}$$

equivale a mv^2

$$T = \underbrace{\frac{1}{2} m r^2 \underbrace{\omega^2}_{\text{vel. ang.}}}_{\text{L'Ec in funzione della velocità angolare}} = \frac{1}{2} \frac{J^2}{mr^2}$$

equivale a $m r^2 \omega^2$

Il momento di inerzia:

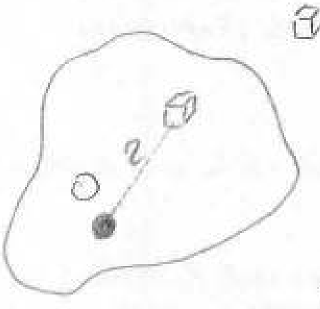
$$I = mr^2$$

IL VALORE È FUNZIONE **QUADRATICA** del raggio del sistema.

La quantità di moto (una massa per una velocità) è la misura dell'inerzia di un corpo con inerzia intesa come la tendenza di un corpo a resistere contro i tentativi di cambiare la sua velocità, di cambiare il suo stato di moto o di quiete.

Il momento angolare ha una formula di struttura simile a quella della quantità di moto: abbiamo una velocità angolare che moltiplica il parametro mr^2 che a sua volta misura la facilità o la difficoltà che si incontra nel cercare di mettere in rotazione il corpo.
Questo dipende sia dalla massa del corpo che dalle dimensioni del sistema.
Anche questa seconda misura (J) è la capacità di un sistema ad opporsi ai tentativi di cambiamento dello stato del suo moto rotatorio. È una manifestazione dell'inerzia alla rotazione del sistema e include informazioni sulla massa e le dimensioni e, come vedremo, anche la forma del sistema.

MOMENTO D'INERZIA DI UN CORPO ESTESO



▢ = dm è una parte della massa totale

dV è il volume infinitesimo

O = perno, fulcro

Il corpo è fissato in un punto. Immaginiamo di suddividere il corpo fisicamente in cubetti, come un elemento molto piccolo, arbitrariamente piccolo (matematicamente un differenziale). Sia r la distanza dell'elemento, pensando che per completezza di informazione dovremmo sapere anche come è posizionato angolarmente rispetto al fulcro l'oggetto e nel caso generale usando parametri per un ambiente tridimensionale piuttosto che bidimensionale

$$\underbrace{dI = r^2 \, dm}$$ → massa infinitesima

momento di inerzia del singolo elemento rispetto all'asse che passa per il punto O.

momento di inerzia dell'intero corpo:

$$I = \int_{corpo} dI = \int_{corpo} r^2 \, dm$$

generalmente la formula è questa, ma cambiando dm, cambia anche il raggio. E ogni elemento ha il suo r^2

è la somma dei momenti di inerzia di tutti gli elementi del corpo.
La somma di infinitesimi è un integrale.
L'integrale non è indefinito, ma è definito ed il dominio è esteso al corpo oggetto di studio.

Per determinare I occorre introdurre che ogni elemento ha ~~massa~~ volume ~~volumi dm e che~~ dV, assieme densità, rapporto tra massa e volume

$$\rho = \frac{dm}{dV}, \quad \text{quindi} \quad I = \int_{corpo} r^2 \rho \, dV$$ → la densità in un punto, quella dell'elemento

(le coordinate usate non influenzano il risultato).

ρ è funzione delle coordinate, ad es di x, y e z, anche r^2 può essere scritto in funzione delle coordinate del punto in cui sono. Tridimensionalmente e in coordinate cartesiane $r^2 = x^2+y^2+z^2$; bidimensionalmente $r^2 = x^2+y^2$.
Pure l'elemento di volume può essere scritto in funzione delle coordinate.

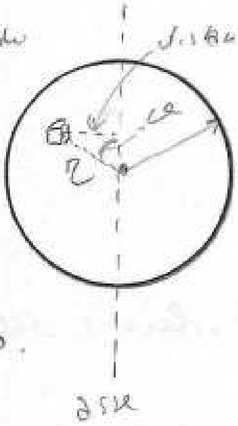
Dunque

$$I = \int_{corpo} r^2 \underbrace{\rho}_{densità} \underbrace{dV}_{volume}$$

Sia r^2, che ρ, che dV possono essere espressi in funzione delle coordinate. Questo rende calcolabile la funzione. Dal calcolo di funzioni reali con tecniche reali si ottiene un numero che rappresenta il MOMENTO DI INERZIA DEL CORPO RISPETTO ALL'ASSE DI ROTAZIONE CHE PASSA PER IL PUNTO O.

Esempio: MOMENTO DI INERZIA DI UNA SFERA MASSICCIA RISPETTO AL CENTRO

SFERA di massa M e raggio R



distanza dell'elemento dall'asse di rotazione e vale $r \cdot \sin\theta$

□ elemento, di distanza r dal centro. r è ovviamente variabile per ogni elemento, e varia da 0 a R.

Sfera di massa M e raggio R.
L'asse che consideriamo è quello che passa per il centro della sfera, poiché la sfera è simmetrica, ogni asse è equivalente.

$$I = \int_{SFERA} \boxed{r^2 \sin^2\theta} \; \underbrace{\overset{densità}{\rho} \, \overset{volume}{dv}}_{dm}$$

dm, la massa, che è la densità per il volume dell'elemento infinitesimo

θ è l'angolo tra la direzione che individua la posizione dell'elemento della sfera e l'asse di rotazione. Questo serve perché devo introdurre la distanza (al quadrato) del punto dall'asse di rotazione. La distanza non è r, ma la proiezione di r sull'asse, che trigonometricamente è $r \cdot \sin\theta$.

La densità, per eseguire il calcolo, deve essere conosciuta. Se la sfera è omogenea, la densità è costante, ossia $\rho = \rho_0$, con ρ_0 valore costante.

Dunque, considerando costante la densità perché la sfera è omogenea e detta ρ_0 la densità, abbiamo:

$$I = \rho_0 \int_{sfera} r^2 \sin^2\theta \, \underbrace{dV}$$

va scritto in funzione di r e θ.
L'elemento ha uno spigolo dr, un altro come piccola rotazione di θ, $r d\theta$ e il terzo spigolo

come di rete
raggio di rotazione in ... alla meridiana

dV deve essere scritto in funzione di r e θ.

Ogni elemento è un parallelepipedo con 3 spigoli, uno di dimensione dr, uno dato da una piccola rotazione di θ e di valore $r\,d\theta$, il terzo, perpendicolare agli altri due e al piano della figura, di valore $r \sin\theta\, d\varphi$, dove $r \sin\theta$ è il raggio di rotazione intorno alla rettezza e φ è l'angolo di rotazione.

Quindi

$$I = \rho_0 \int_{sfera} r^2 \sin^2\theta \cdot r^2 \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi$$

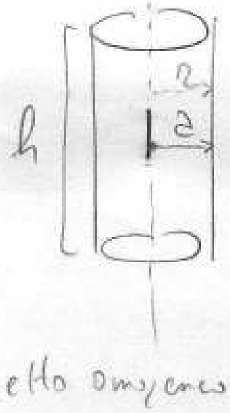
Il risultato finale è:

$$I = \rho_0 \cdot \frac{R^5}{5} \cdot \overbrace{2\pi}^{\text{integrazione di } \varphi} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{4}{3}}}_{\int \sin^3\theta\, d\theta}$$

Si nota che $\underbrace{\rho_0}_{\text{densità}} \cdot \overbrace{\frac{4}{3}\pi R^3}^{\text{volume sfera}} = M$, cioè ρ per il volume della sfera è la massa della sfera, quindi:

$$I = M \cdot R^2 \cdot \underbrace{\frac{2}{5}}_{\text{fattore numerico}}$$

Esempio: MOMENTO DI INERZIA DI UN CILINDRO RISPETTO AL SUO ASSE.



$$I = \rho_0 \int_{cilindro} \underbrace{r^2}_{\text{distanza asse-cilindro}} \cdot \underbrace{dr \cdot \overset{\text{verticale}}{dz} \cdot \overset{\text{piccola rotazione}}{r\, d\theta}}_{\text{elemento di volume}}$$

(sono 3 integrali separati)

Oggetto omogeneo => densità ρ_0

$$I = \frac{1}{3} \underbrace{M}_{\text{massa}} \cdot \underbrace{a^2}_{\text{raggio del cilindro}}$$

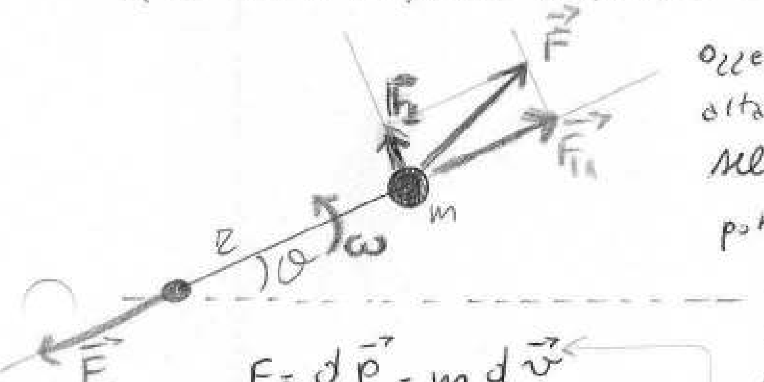
LEZ. 15 DINAMICA DI UN CORPO RIGIDO

Prof. Angelo Tartaglia
42'44"

ROTAZIONE VINCOLATA
CORPO RIGIDO
ROTAZIONE NON VINCOLATA

TEOREMA DI HUYGENS-STEINER

ROTAZIONE VINCOLATA



Oggetto puntiforme di massa m, vincolato a muoversi attaccato ad un'asta rigida di lunghezza r. Alla massa è applicata una forza che la porta a muoversi di un moto di rotazione.

La forza applicata F può essere scomposta in componenti lungo la direzione dell'asta ($\vec{F}_{\parallel}$ parallela e $\vec{F}_v$ del vincolo) perpendicolarmente alla direzione dell'asta ($F_\perp$).

$$F = \underbrace{\frac{d\vec{p}}{dt}}_{\text{quantità di moto dell'oggetto}} = m\underbrace{\frac{d\vec{v}}{dt}}_{\text{accelerazione}}$$

Formula valida senza considerare il vincolo

$\vec{F} = \vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_v + \vec{F}_\perp$

Includendo il vincolo, più che in termini di forza, è più conveniente parlare di momento della forza:

$$\underbrace{r \wedge F}_{\text{causa agente del movimento}} = \boxed{r \wedge \frac{d\vec{p}}{dt}} \quad \text{che può essere scritto}$$

momento angolare del sistema

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{J}}{dt} = I\,\frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

$\vec{\tau}$ momento angolare della forza, causa del movimento

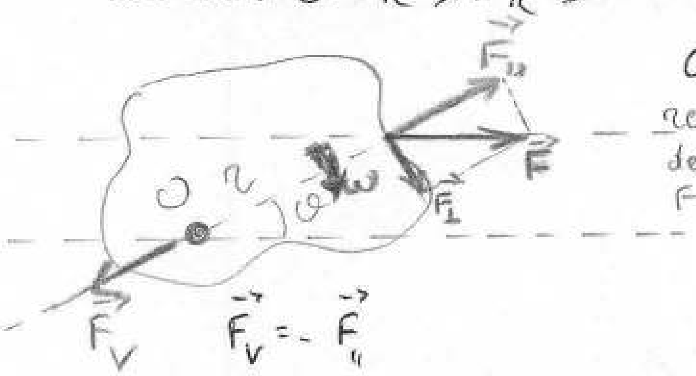
$d\vec{J}$

$F_v = -F_{\parallel}$

↳ Reazione del vincolo

$$rF = rF\sin\vartheta = I\,\frac{d^2\vartheta}{dt^2}$$

CORPO ESTESO



Corpo di massa m, imperniato, a cui è applicata una forza F.

$\vec{F}_V = -\vec{F}_{//}$

$F_\perp = F \sin\alpha$

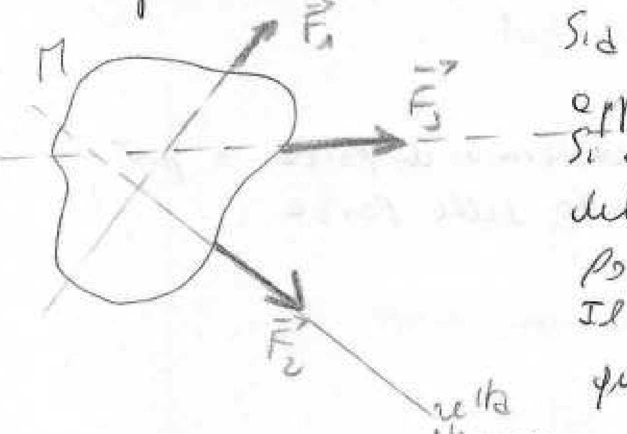
$$\tau = \frac{d\vec{J}}{dt} = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt}$$

$\vec{J}$ → quantità di moto angolare

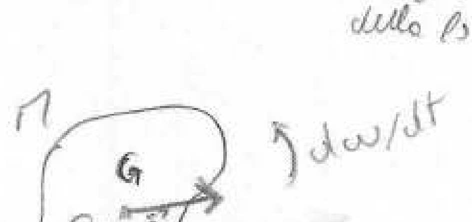
τ ↳ momento delle forze motrici

ROTAZIONE NON VINCOLATA

Il corpo non è vincolato ad un asse in particolare. Può ruotare, ma può anche traslare.



Sia M la massa del corpo. Ad esso sono applicate 3 forze.
Si applica la tecnica di determinazione del centro di applicazione delle tre forze.
Il centro delle forze è un punto particolare, quello rispetto al quale la somma dei momenti delle forze è nullo.



↳ Risultante delle tre forze $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$, ovvero è la somma vettoriale delle tre forze applicate.

C = centro delle forze applicate

G = centro di massa

r = distanza tra C e G, è orientato da G a C

Supponendo di aver determinato il centro delle forze il corpo avrà lo stesso comportamento applicando la risultante delle tre forze applicate.
Così il corpo si muoverà accelerando. L'accelerazione è un vettore applicato al centro di inerzia, che è determinato dalla distribuzione di materia nel corpo. Sia esso il punto G.

L'accelerazione dell'intero corpo è la risultante delle accelerazioni di tutte le particelle del corpo.
Tale risultante è rappresentabile con un unico vettore, applicato al centro di massa e non al centro delle forze motrici.
Questa differenza è importante per determinare il comportamento finale del corpo.

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = M\vec{a} \qquad (1)$$

↳ accelerazione traslazionale
↳ massa totale del corpo.

La non coincidenza tra il centro di massa e il centro delle forze applicate fa entrare in gioco anche un momento, immaginando che sul sistema agisca una coppia.

C'è anche una forza di reazione, il cui punto di applicazione è G, verso opposto a $\vec{A}$ e modulo uguale a $\vec{R}$.
Queste due, $\vec{F}$ e la forza di reazione danno luogo ad una coppia di forze che ha un momento:

$$\vec{r} \wedge \vec{R} = \vec{\tau} \qquad (2)$$

momento della coppia di forze
↳ esterno, prodotto

Il sistema inizierà a ruotare acquisendo una accelerazione angolare.
Questo in conseguenza della presenza di un momento di forze, una coppia di forze.

Il sistema avrà dunque una accelerazione lineare che farà traslare il corpo, ma anche una accelerazione angolare che cerca di farlo ruotare.

La legge che riguarda questa rotazione, da associare alla (1) è la legge del moto per le rotazioni:

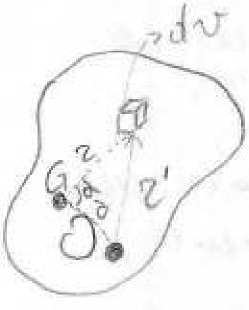
$$\vec{\tau} = I \cdot \boxed{\frac{d\vec{\omega}}{dt}} \qquad (3)$$

↳ coppia motrice = momento di inerzia rispetto all'asse per G moltiplicato per l'accelerazione angolare

IL TEOREMA DI HUYGENS-STEINER

Applicabile a situazioni di moto rototraslatorio.

Esprime il momento di inerzia di un corpo tridimensionale rispetto ad un asse qualsiasi.



Sia O un punto e si voglia determinare il momento di inerzia rispetto ad un asse che passa per O perpendicolare alla figura
La distanza r' può essere pensata come un vettore

$$r = \int_{corpo} r'^2 \cdot \underbrace{\rho}_{\text{densità}} \underbrace{dv}_{\text{volume}}$$

momento di inerzia rispetto al punto O, che in linea generale non coinciderà col centro di massa.

Il momento di inerzia r rispetto al punto O in linea generale non coinciderà col centro di massa, che rappresenta il centro delle forze di inerzia. È il centro in cui si può ~~imag~~ immaginare applicata la risultante delle forze di inerzia intendendo per forze di inerzia, forze che sono proporzionali alla massa moltiplicata per l'accelerazione di cui la massa è dotata e cambiate di segno.
Rispetto al centro di massa l'elemento ha un'altra posizione individuata da un altro vettore, indicato con r

$$I = \int_{corpo} r^2 \rho \, dv$$

è il momento di inerzia rispetto ad un asse che passa per il punto G. La formula, si nota, è dello stesso tipo.

Le due quantità r e I sono diverse, avendo cambiato punto di riferimento, o asse di riferimento.

Possiamo in qualche maniera esprimere questi due momenti di inerzia uno in funzione dell'altro.

Introduciamo una informazione che è la distanza tra O e G.
Sia a la distanza e α l'angolo in G.

Il triangolo ottenuto mi permette di esprimere r' in funzione di r e di a, applicando il teorema di Carnot:

$$r'^2 = r^2 + a^2 - 2ar\cos\alpha$$

Sostituendo questo nelle espressioni precedenti:

densità di massa nel punto che stiamo utilizzando per il volume dell'elemento

$$I' = \int_{corpo} r^2 \rho\, dv + a^2 \int_{corpo} \rho\, dv - 2a\int_{corpo} r\cos\alpha\,\rho\, dv$$

momento di inerzia dell'intero corpo rispetto al centro di massa G (= I)

distanza tra G e O, è una costante relativa alla posizione dell'elemento

è un elemento di massa che devo sommare su tutto il corpo, ottenendo la massa totale. In pratica è la massa totale · a^2

0 quando faccio l'integrale, perché la massa su cui sto sommando si trova da tutte le parti rispetto al centro di massa, che è un punto speciale rispetto a cui il momento risultante della massa fa 0, ci sono masse a destra come a sinistra, in alto e in basso

Fatte le dovute considerazioni, il momento di inerzia di interesse, quello rispetto al punto O (ad un asse passante per il punto O) è la somma di due termini, uno che è il momento di inerzia rispetto al centro di massa (I_G) o, meglio rispetto ad un asse passante per il centro di massa. Quantità facilmente calcolabile a seconda dei casi.
L'altro è il prodotto della massa M dell'oggetto per il quadrato ~~[illegible]~~ di a:

$$I' = I_G + Ma^2$$

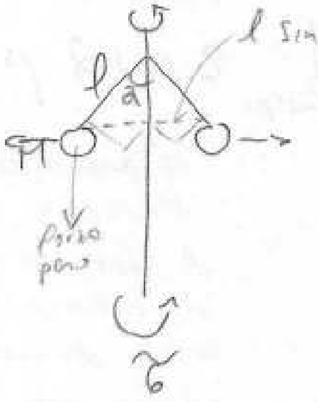
è come se aggiungessi un altro oggetto con tutta la massa concentrata in un unico punto O e si trova a distanza a dal centro di massa

I due momenti di inerzia sono diversi e la formula che lo dimostra risulta semplice.

Esempi:

1. Il regolatore di Watt (stabilizzatore di moto rotatorio)
2. Momento di inerzia di una corona circolare

Esempio 1:



Equazione per il moto attorno all'asse verticale

$$\tau = I \cdot \frac{d\omega}{dt}$$

il moto è accelerato.

$$I = 2 \cdot M \cdot l^2 \cdot \sin^2\alpha$$

La somma delle due sfere, che considero puntiformi.
I è il momento di inerzia del sistema, formato da due sfere

L'equazione del moto diventa:

$$\tau = 2M l^2 \underbrace{\sin^2\alpha}_{\text{dipende dalla velocità di rotazione}} \cdot \frac{d\omega}{dt}$$ velocità di rotazione intorno all'asse e non intorno all'angolo α

Per ω e α sono le due incognite e tenendo conto della forza peso sulle sfere:

$$\underset{\text{accelerazione sul piano verticale}}{I\frac{d^2\alpha}{dt^2}} = M \cdot g \cdot \overbrace{l \sin\alpha}^{\text{braccio}} - \underbrace{M \cdot \overbrace{\omega^2}^{\text{vel. angolare}} \cdot \overbrace{l \sin\alpha}^{\text{raggio di rotazione}}}_{\text{momento della forza centrifuga}} \cdot \underbrace{l \cdot \cos\alpha}_{\text{proiezione sulla verticale}}$$

inerzia I

In condizioni di stabilità, cioè quando α ha raggiunto un valore costante e le due forze, quella verticale dovuta al peso e quella orizzontale dovuta alla forza centrifuga, si controbilanciano.

Cioè quando

$$\underbrace{\cancel{m} g \cdot \cancel{l} \cancel{\sin\alpha}} = \cancel{m} \cdot \omega^2 \cdot l^{\cancel{2}} \cancel{\sin\alpha} \cos\alpha$$

Momento della forza peso | Momento dovuto alla forza centrifuga

Con $\sin\alpha \neq 0$; rappresenta la condizione in cui $\omega = 0$, non c'è velocità angolare.

Da cui la soluzione di equilibrio

$$g = \omega^2 \cdot l \cdot \cos\alpha$$

Si nota che qualunque condizione vera non riesce a portare il suo braccio orizzontale, con $\alpha = 90°$, in quanto $\cos 90° = 0$, per cui dovrebbe essere ω^2 un valore ∞, tale da mantenere l'uguaglianza con g.

Quanto è grande α dipende da ω.

$$\cos\alpha = \frac{g}{l \cdot \omega^2}$$

Esempio 2:
(applicare il teorema di H - Steiner)

LEZ. 16 MOTO DI UN CORPO RIGIDO

Prof Angelo Tartaglio
Li "55"
EQUILIBRIO DI UN CORPO RIGIDO
CORPO RIGIDO SOTTO L'AZIONE DI UN MOMENTO TORCENTE NON NULLO
ROTOLAMENTO

EQUILIBRIO DI UN CORPO RIGIDO O DI UN SISTEMA DI CORPI RIGIDI

Un corpo o un sistema in equilibrio hanno accelerazione 0 : $\bar{a} = 0$.

Se l'accelerazione è nulla, ~~tutte~~ la risultante di tutte le forze applicate al sistema, esterne ed interne, è nulla.

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i = 0$$

Un sistema sottoposto a forze esterne non si muove se la risultante è 0, sia delle forze applicate, sia delle coppie di forze applicate:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_{est_i} = 0 \qquad \bar{\tau} = \sum_{i=1}^{n} \tau_{est_i} = 0$$

La risultante di tutte le coppie applicate è uguale al momento di inerzia intorno all'asse della coppia di forze in esame moltiplicato per l'accelerazione angolare:

$$\bar{\tau} = I \dot{\bar{\omega}} = I \ddot{\bar{\theta}}$$

→ angolo attorno ad un asse, abbiamo una accelerazione perché deriviamo due volte rispetto al tempo.

→ velocità angolare,

$\dot{\omega}$ è la derivata rispetto al tempo, quindi una accelerazione angolare, la sbarra sopra indica un vettore, con direzione l'asse di rotazione

Le due condizioni

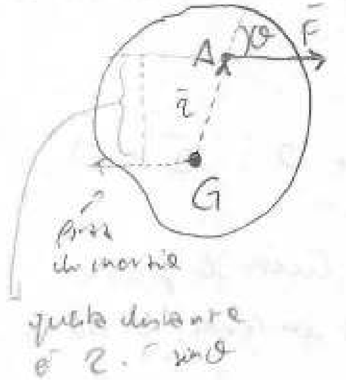
$$\bar{R} = 0$$

$$\bar{\tau} = 0$$

sono le condizioni di equilibrio di un corpo rigido o di un sistema di corpi rigidi.

CORPO RIGIDO SOTTO L'AZIONE DI UN MOMENTO TORCENTE NON NULLO

Il corpo ruoterà attorno ad un asse con un moto rotatorio accelerato.



Sia G il centro di massa, riferimento per tutti i riferimenti inerziali del corpo.
Sia A un punto del corpo al quale applichiamo una forza esterna $\bar{F}$.
L'equazione del moto del corpo sarà:

$$\bar{F} = m \cdot \bar{a}$$

↳ la massa può essere considerata concentrata nel centro di massa, che non coincide col punto in cui è applicata la forza esterna

Tra le forze di inerzia e quelle motrici c'è un momento applicato diverso da 0.
Il momento sarà:

$$\bar{\tau} = \bar{r} \wedge \bar{F} \quad (= \bar{\tau} = \bar{r} \times \bar{F})$$

il cui modulo è:

$$\tau = r \cdot F \cdot \sin\vartheta$$

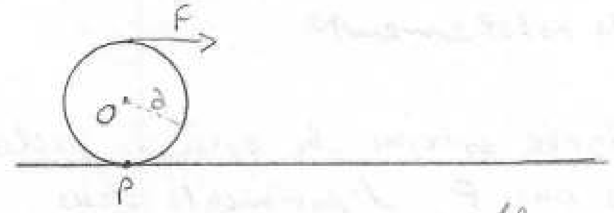
↳ braccio della coppia di forze

Il moto del corpo è un moto complesso, fatto da una traslazione, con una accelerazione lineare $\bar{a} = \frac{\bar{F}}{m}$ e una accelerazione angolare che farà variare l'angolo ϑ per indurre l'orientamento relativo dei vettori r e F e l'accelerazione sarà $\ddot{\vartheta} = \frac{\bar{r} \wedge \bar{F}}{I}$ ovvero alla coppia diviso per il momento di inerzia.

$$\bar{a} = \frac{\bar{F}}{m} \qquad \ddot{\bar{\vartheta}} = \frac{\bar{r} \wedge \bar{F}}{I}$$

La descrizione del moto è possibile decomponendo la sovrapposizione degli effetti.
Il moto del corpo sarà la sovrapposizione di due tipi di movimento: un moto accelerato lungo la direzione di F e l'altro è un moto rotatorio attorno al centro di massa del sistema.

ROTOLAMENTO



La ruota trasla e ruota simultaneamente e le due cose non sono tra loro separate. Il punto P è un punto fisso ad ogni istante e il punto O si muove ruotando istantaneamente intorno a P.

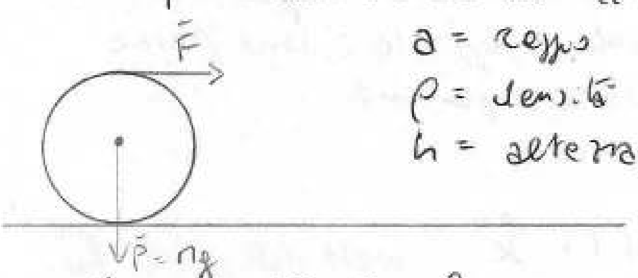
$v_0 = \omega \cdot a = \dot{\vartheta} a$ — angolo di rotazione — raggio della ruota — vel. ang.

Questo è un vincolo rigido, caratteristico del rotolamento. Se la ruota scivolasse, il vincolo non sarebbe più valido.

Il punto O si muove di una certa velocità v_0 lungo la direzione di riferimento. Allora deve avvenire un rotolamento che fa sì che la velocità v_0 sia la velocità periferica di un moto circolare attorno al punto P.

Esempio: un cilindro di raggio costante e densità conosciuta.

a = raggio
ρ = densità
h = altezza



$M_{cna} = \rho \pi a^2 \cdot h$ se c'è una massa, c'è una forza peso

$P = mg$

Ciò che impedisce alla ruota di slittare sarà l'attrito con la superficie su cui il moto avviene, sia f il coefficiente di attrito tra la ruota e la superficie.

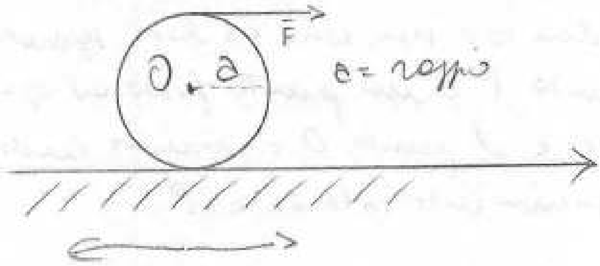
Non si avrà slittamento se la forza di attrito massima risulta essere superiore alla forza che è applicata al bordo del disco per cercare di farlo rotolare.
Se la forza F è maggiore della forza d'attrito allora il contatto non ce la fa a compensare F.
F deve essere minore della massima forza d'attrito possibile.
Dunque la condizione di rotolamento è:

$F \leq f \cdot mg$

componente ⊥ della forza di interazione tra la ruota e il pavimento, che coincide con la forza peso

coeff. di attrito radente 16.3

In questa condizione abbiamo un rotolamento.
Analizziamo come avviene questo rotolamento



Le forze esterne che agiscono sulla ruota sono $\vec{F}$; il pavimento stesso applica una forza di attrito, uguale ed opposta alla F applicata: ci sarebbe una coppia, ma nessuna risultante.

Il sistema che consideriamo contiene la ruota e il piano di appoggio.
Quindi le forze esterne sono quelle alla ruota e al piano d'appoggio, ovvero la F.

Nel punto di contatto la ruota e il pavimento si scambiano forze uguali e opposte: sono forze interne e fra di loro si compensano.

Il moto sarà:

$$F = m a_x = m \cdot \ddot{x}$$ moto del punto O

Il centro di inerzia coincide col centro della ruota.

$$\tau = F \cdot a$$

$$\ddot{x} = \frac{F}{m}$$ moto uniformemente accelerato x F non DIPENDE dal tempo $\left(x = \frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2\right)$

Lo spazio percorso:

$$x = a \cdot \vartheta$$

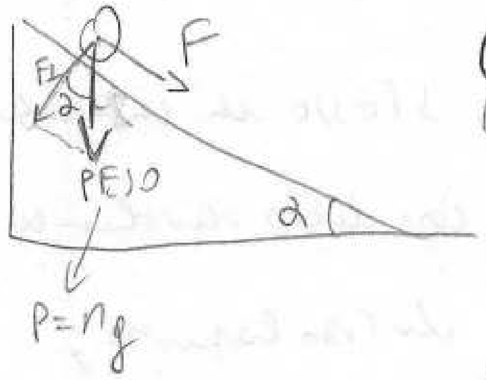
↳ angolo descritto dalla ruota durante il rotolamento
↳ raggio ruota

$$\vartheta = \frac{x}{a} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{F}{m} \cdot t^2$$ equazione per l'angolo di rotazione per un moto di rotolamento puro.

Se $F > f m g$ allora il legame tra angolo di rotazione e traslazione si sarebbe rotto e avremmo avuto insieme una rotazione, una

Traslazione è uno scivolamento, cioè un moto relativo tra il punto di contatto sulla ruota e il suolo nello stesso istante.

Esempio: scivolo, moto lungo un piano inclinato



$\rho \quad d \quad L \qquad f$ = attrito

d → raggio

ρ → densità

$F_\perp = mg \cdot \cos\alpha$ e per la condizione di rotolamento

$f > mg\,\alpha$, abbiamo rotolamento

$F \hat{=} mg \cdot \sin\alpha$

→ forza motrice

L'energia cinetica totale è la somma di due distinti contributi:

$$W_{cinetica} = \underbrace{\frac{1}{2} m \cdot \dot{x}^2}_{\text{traslazione}} + \underbrace{\frac{1}{2} I \dot{\vartheta}^2}_{\text{rotazione}}$$

$\dot\vartheta$ → vel. ang.

$\dot{x}$ → vel. traslazionale

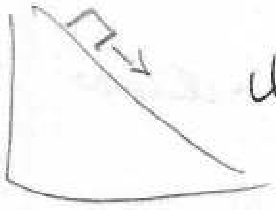
$\dot{x} = a \cdot \dot{\vartheta}$ → vel. ang.

a → raggio cilindro

$\dot{x}$ → vel. traslazionale e allora

$$W_{cin.} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I \cdot \frac{\dot{x}^2}{a^2}$$

Nel caso, ciò visto di un oggetto che scivola su un piano inclinato, esso, con attrito 0 ($f=0$) ha il solo contributo del movimento traslazionale



$$W_{cinetico} = \frac{1}{2} M \cdot \dot{x}^2$$

L'energia gravitazionale è la stessa in entrambi i casi.

Essa è $M g z$ $_{\text{↳ converrà}}$ e nel caso dello scivolamento si converte in energia cinetica di traslazione;

nel caso del rotolamento, quella energia si converte nella somma di due parti: una è l'energia cinetica di traslazione e l'altra è quella di rotolamento.

Quello che scivola arriva prima in fondo perché ha una sola componente, quella di traslazione.

LEZ. 17 LA STATICA (integrale)

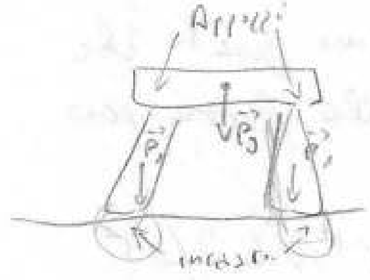
INDICE

EQUILIBRIO e VINCOLI

IL PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI

EQUILIBRIO DI UNA VOLTA

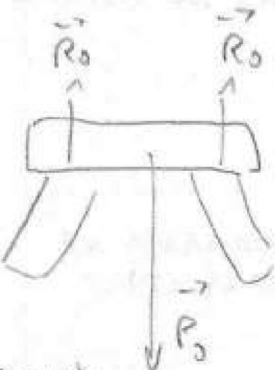
EQUILIBRIO E VINCOLI



Tutto il sistema è in equilibrio quando:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0$$ forze esterne

$$\sum_i \vec{\tau}_i = 0$$ coppie delle forze esterne



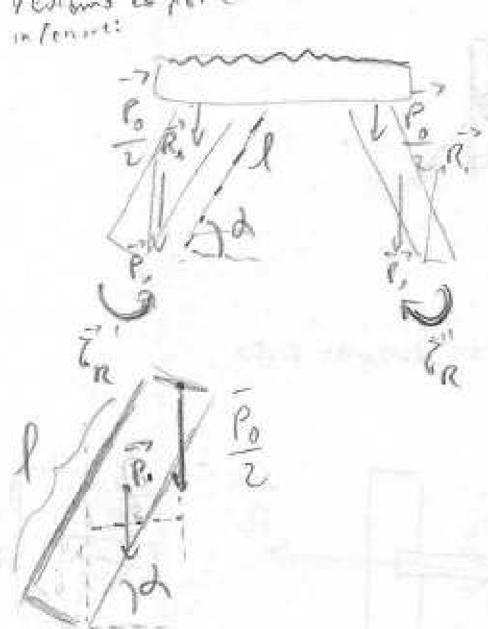
$$\vec{R}_0 = -\frac{\vec{P}_0}{2}$$

↳ vettore reazione

Vincolo unilaterale, agisce solo in una direzione

attrito = 0

vediamo le parti interne:



$$\vec{R}_1 = -\vec{P}_1 - \frac{\vec{P}_0}{2}$$

↳ Reazione alla base di ciascun pilastro, sufficiente a controbilanciare i due pesi che agiscono verso il basso. Il sistema ha simmetria al piano centrale.

$$|\vec{\tau}_R| = |\tau_R'| = \frac{P_0}{2} l \cos\alpha + P_1 \frac{l}{2}\cos\alpha =$$

$$= (P_0 + P_1)\frac{l}{2}\cos\alpha$$

Queste non bastano a garantire l'equilibrio perché: diversi pesi non agiscono lungo la stessa retta d'azione, quindi il pilastro tende a ruotare verso l'interno.

$\frac{P_0}{2} \cdot \underbrace{l \cdot \cos\alpha}_{\text{braccio}}$ = coppia che tende a far ruotare il pilastro verso destra dovuta all'appoggio superiore, all'azione esercitata indirettamente dalla lastra superiore.

tende a far ruotare il pilastro verso dx dovuta all'appoggio superiore

$P_1 \cdot \frac{l}{2} \cos\alpha$

Poi dobbiamo aggiungere il peso del pilastro, P_1, che determina un momento

Se vogliamo che il sistema sia in equilibrio, bisogna che le basi funzionino come un vero incastro, così che sia in grado di esercitare una coppia, un momento che si oppone a quello dovuto al peso

17.1

massa di uno dei pilastri moltiplicata per accelerazione di gravità

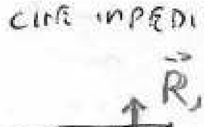
$$\tau = (P_0 + P_1) \cdot \frac{l}{2} \cdot \cos\alpha$$

↳ massa piastra sup. × accelerazione di gravità.

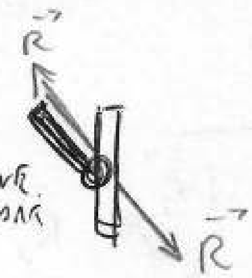
L'incastro alla base deve essere in grado di esercitare in senso opposto, antiorario un momento come quello che compensa il momento orario dovuto alla forza peso.

CLASSIFICAZIONE DEI VINCOLI

UN VINCOLO È UNA CONDIZIONE FISICA CHE IMPEDISCE AL SISTEMA DI MUOVERSI.
I VINCOLI SONO DI VARIO TIPO.

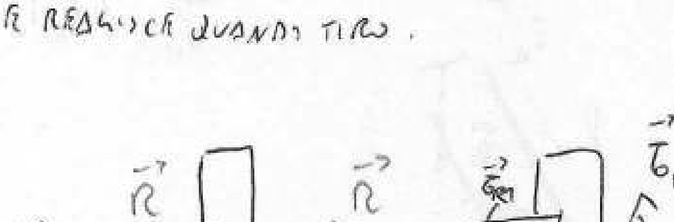


APPOGGIO: REAGISCE SOLTANTO IN UNA DIREZIONE, UNILATERALE, ORTOGONALMENTE AL PUNTO DI APPOGGIO.
IL VINCOLO APPOGGIO NON IMPEDISCE LO SCORRIMENTO NÉ LO SPOSTAMENTO IN ALTO DEL SISTEMA APPOGGIATO.



CERNIERA: NON IMPEDISCE LA ROTAZIONE.
NON È IN GRADO DI CONTRASTARE DELLE COPPIE APPLICATE.
È IN GRADO DI REAGIRE AD AZIONI DI TRAZIONE E COMPRESSIONE.

REAGISCE QUANDO PREMO E REAGISCE QUANDO TIRO.
È UNA AZIONE BILATERALE.



INCASTRO: È IN GRADO DI REAGIRE SIA A TRAZIONE CHE A COMPRESSIONE.
È IN GRADO DI REAGIRE ANCHE A TORSIONI, A TENTATIVI DI RUOTARE UN ELEMENTO RISPETTO ALL'ALTRO. È IN GRADO DI APPLICARE DELLE REAZIONI CHE SONO DELLE COPPIE DI REAZIONE VINCOLARE SIA IN UN VERSO CHE NELL'ALTRO.

Supponiamo, (erroneamente), che il vincolo possa sopportare qualunque tipo di trazione o compressione che nella realtà non accade.

IL PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI

HA APPLICAZIONE NELLO STUDIO DELL'EQUILIBRIO DI SISTEMI ELASTICI, DI CORPI DEFORMABILI, IN PARTICOLARE

È MOLTO IMPORTANTE NELLA SCIENZA DELLE COSTRUZIONI.

SI PARTE DALL'IDEA DELL'EQUILIBRIO, REINTERPRETANDO LE CONDIZIONI CHE GARANTISCONO L'EQUILIBRIO DI UN SISTEMA ALLA LUCE DELLA SUDDIVISIONE DI FORZE APPLICATE DALL'ESTERNO E VINCOLI

LA CONDIZIONE DI EQUILIBRIO È CHE LA SOMMA DI TUTTE LE FORZE APPLICATE ESTERNAMENTE AD UN DATO SISTEMA SIA 0.

EQUILIBRIO: $\sum_i \vec{F}_i = 0$

RISCRIVIAMO LA STESSA COSA SEPARANDO LE FORZE DISTINGUENDO QUELLE CHE CONSIDERIAMO ESTERNE E ATTIVE (LA FORZA PESO, ad es.) DALLE ALTRE FORZE CHE CONTROBILANCIANO QUESTE CHE SONO LE REAZIONI VINCOLARI.

Equilibrio: $\sum_i \bar{F}_{e_{sterne}} = -\sum_j \bar{R}_j$

Forze esterne

Reazioni vincolari

vale anche per i momenti:

momenti dei vettori

$$\sum_i \bar{\tau}_i = -\sum_j \bar{\tau}_j$$

somme delle coppie attive esterne

somme delle coppie passive, vincoli

Lavori virtuali

$$\sum_i \vec{F}_{i,\text{esterne}} \cdot \hat{u}_i \, dl_i = -\sum_j \vec{R}_{j,\text{vinc}} \cdot \hat{u}_j \, dl_j$$

Sostituiamo i vincoli con una forza equivalente al vincolo, quindi nulla cambia.

Poi immaginiamo di spostare un poco il punto di applicazione di questa forza.

$$\sum_i \vec{T}_{i,\text{est}} \cdot d\vec{\alpha}_i = -\sum_j \vec{T}_{j\,\text{vinc}} \cdot d\vec{\alpha}_j$$

ROTAZIONI

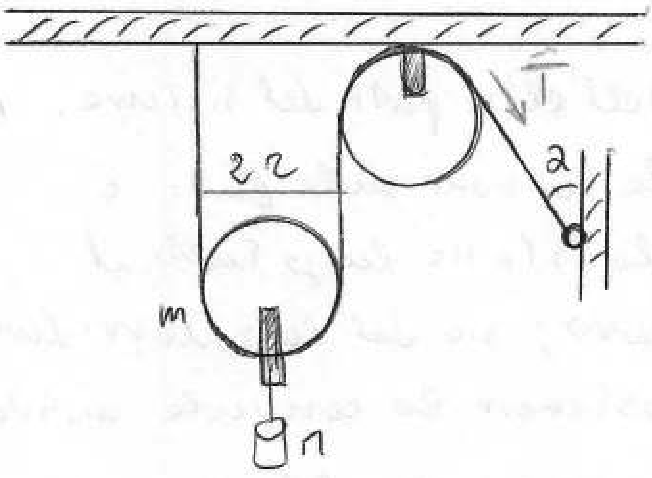
$$\sum_i d\mathcal{L}_{i,\text{est}} = -\sum_j d\mathcal{L}_{j\,\text{vinc}}$$

Il vincolo, come tale, non si muove, ma immaginando una forza di altra natura che equivale al vincolo posso anche immaginare un piccolo spostamento virtuale, perché nel sistema fisico non ci sono spostamenti se il sistema è in equilibrio.
LO SPOSTAMENTO VIRTUALE È FORMALIZZATO CON UNA DIREZIONE $\hat{u}$ MOLTIPLICATO PER L'ENTITÀ DELLO SPOSTAMENTO, MISURATO IN LUNGHEZZA, $\hat{u}_i$ e m.

Il fatto che ci sia uno spostamento implica che ci sia un lavoro connesso con lo spostamento.
LA COMBINAZIONE DELLA REAZIONE DEL VINCOLO CON LO SPOSTAMENTO MI DÀ IL LAVORO FATTO DA QUESTA FORZA.

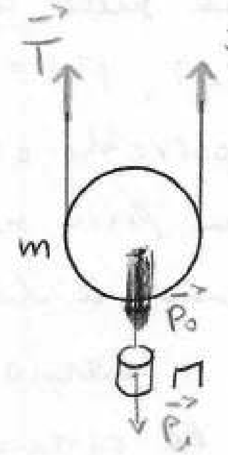
Tutto il sistema si sposta, modificandosi.
L'adattamento dei vincoli deve essere pari a quello delle forze esterne. Tutti i lavori si compensano come si compensano le forze.

Esercizio con il lavoro virtuale e senza



Dato il sistema in figura, quale è la tensione T della fune?

Analizziamo il sistema nelle sue parti



(1) $\vec T = \vec T'$

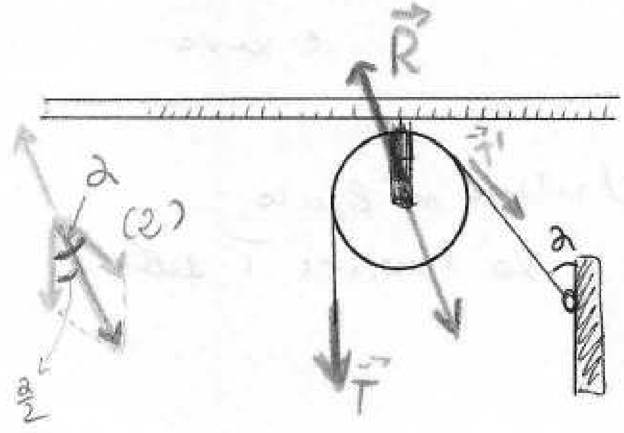
(2) $\vec P_0 + \vec P_1 = -2\vec T$

(3) $T = \frac{g}{2}(m+M)$

essendo $P_0 = mg$ e $P_1 = Mg$

La carrucola è tenuta su dalla tensione della fune. I due rami della fune sono sottoposti ad una tensione che è verso l'alto perché la fune è vincolata dalla parete superiore a sinistra e alla seconda carrucola a destra. T e T', le due tensioni, devono essere la stessa cosa, se sono in equilibrio(1). Una fune è un sistema flessibile quindi è in grado di esercitare una azione di trazione lungo il suo asse e basta. Non resiste trasversalmente e non esiste compressione, resiste solo a trazioni. Se $\vec T \neq \vec T'$ la fune dovrebbe scorrere in uno dei due versi, trasferendo materia (la fune). Le due forze sono parallele, il modulo è lo stesso, quindi le "frecce" hanno stesse lunghezza. Inoltre deve valere la (2) per il controbilanciamento delle due masse, m e M, di peso P_0 e P_1. Il − nella (2) ci dice che la reazione vincolare è verso l'alto, mentre la reazione è verso il basso. La tensione della fune è dunque data dalla (3).

17.5



(1) $|\vec{T}| = |\vec{T}'|$

(3) $\vec{R} = -(\vec{T} + \vec{T}')$

(4) $R = 2T \cos \frac{\alpha}{2}$

Dall'altra parte del sistema, la tensione sulla fune è la stessa lungo tutto il corpo, sia dal lato dove deve sostenere la carrucola mobile, sia dall'altro lato dove la tensione si scarica sulla cerniera.
Deve valere la (1), $|T| = |T'|$, perché altrimenti non ci potrebbe essere equilibrio. Però le due forze non sono più tra loro parallele, quindi ci dovrà essere una risultante che si scarica sul vincolo a cui è sottoposta la carrucola fissa, ovvero il suo asse che è collegato alla staffa che è collegata al soffitto, la risultante è →. Per vedere quanto è grande questa forza, basta fare la sovrapposizione degli effetti, la somma vettoriale di $\vec{T}$ e $\vec{T}'$, vd. (2).
Ad essa corrisponde una reazione vincolare → $\vec{R}$ uguale ed opposta.
Il vincolo contrasta questa risultante e mantiene la carrucola lì dove è.
Quanto vale $\vec{R}$ è semplice, vd. (3); l'angolo formato da $\vec{T}$ e $\vec{T}'$, essendo $\vec{T}$ verticale, è l'angolo α, che individua l'inclinazione della fune rispetto alla parete.
La risultante → è la diagonale maggiore

di un rombo ed è due volte la proiezione di ciascuno dei due lati uguali, T e T' sulla direzione della diagonale.
La diagonale principale divide l'angolo α in due parti uguali, $\frac{\alpha}{2}$. La proiezione si fa moltiplicando per il coseno dell'angolo (4)
Dunque, ricapitolando abbiamo:

$$(2) \quad |\vec{T}| = |\vec{T'}|$$

$$(3) \quad \vec{R} = -(\vec{T} + \vec{T'})$$

$$(4) \quad R = 2T \cdot \cos\frac{\alpha}{2} = \overbrace{g(m+M)}^{T} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$$

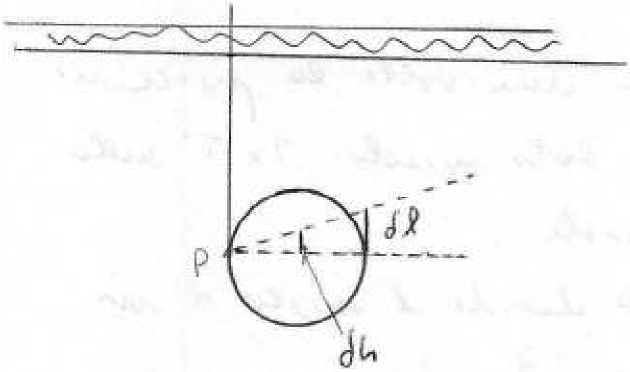
Lo applicando a T
la (3) del sistema con la prima carrucola

Vediamo ora lo stesso sistema sostituendo la cerniera con una forza e supponendo che la forza trascini l'anello e quindi la fune per un certo spostamento, identificato con δl, questo comporta uno spostamento in alto della carrucola mobile di una certa quantità δh.

Vale la seguente:

$$\underbrace{\delta L}_{\text{Lavoro}} = R\,\delta l = \underbrace{-(m+M)\,g\,\overbrace{\delta h}^{\text{entità del sollevamento}}}_{\text{Lavoro del sollevamento, è negativo perché è un sollevamento}}$$

Ma le due quantità δl e δh
17.7 non sono indipendenti. Ma dove,



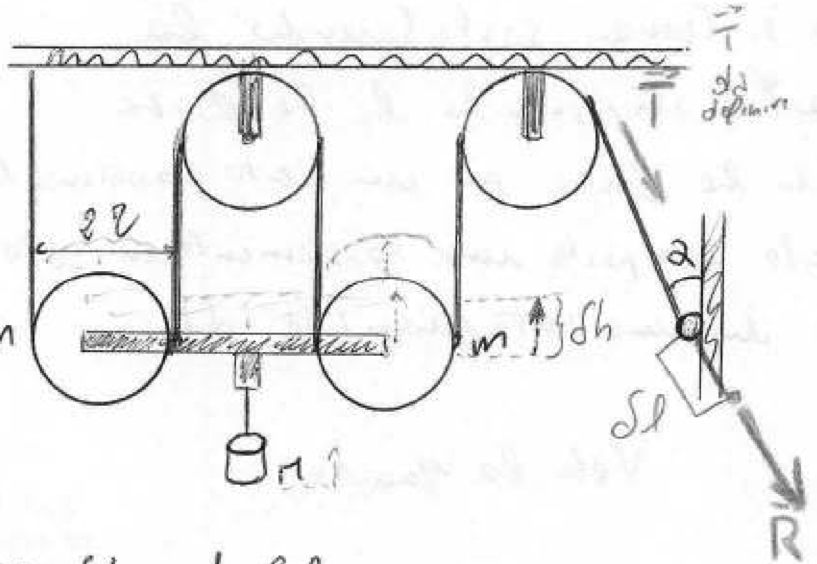
La carrucola mobile è come se stesse rotolando sul punto P, istantaneamente fisso.
Se alzo di una quantità δl, il centro si alza della metà, quindi $\delta h = \frac{1}{2}\delta l$. (1)

(1) $\delta h = \frac{1}{2}\delta l$

(2) $|R| = (m+M)\cdot\frac{1}{2}g$

Sapendo questo, possiamo scrivere l'uguaglianza tra i lavori e da questa risolvere il valore di R che era l'equivalente del vincolo ed è quello che corrisponde alla tensione alla fune, ottenendo la (2), che è lo stesso risultato ottenuto in precedenza.

Il Paranco



Dato il sistema in figura, un paranco, quale è la tensione alla cerniera?
Il procedimento si basa sui lavori virtuali, togliendo il vincolo, sposto il punto di applicazione di R di un certo spostamento δl, con un certo sollevamento δh.
Dunque il principio dei lavori virtuali dice che ..., i lavori delle forze esterne devono essere

(1) $\delta h = \frac{1}{4}\delta l$

(2) $(2m+M)g\cdot\delta h = R\,\delta l = 4R\,\delta h$

(3) $R = T = \frac{1}{4}g(2m+M)$

controbilanciata dal lavoro fatto dalla forza corrispondente al vincolo.
Notiamo (1) che $\delta h = \frac{1}{4}\delta l$ perché δl solleva per metà il lato destro e per metà il lato sinistro.
Usando questa relazione e uguagliando i lavori otteniamo (2):

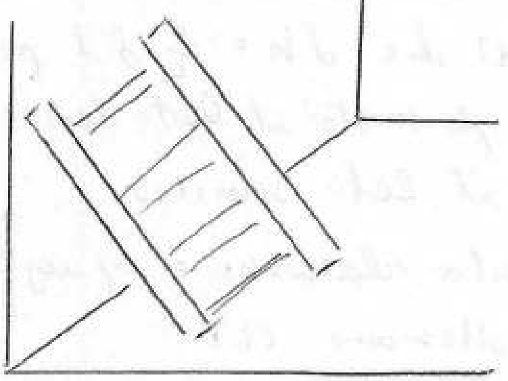
$$(2)\quad \underbrace{(2m+M)}_{\text{Peso da sollevare}}\, g\, \underset{\frac{1}{4}\delta l}{\delta h} = \overset{\text{Tensione della fune}}{R}\,\delta l = 4R\delta h$$

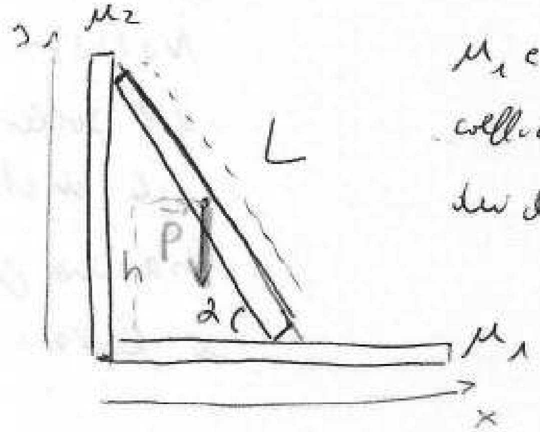
e da questa la (3):

$$(3)\quad R = T = \frac{1}{4}\cdot g\cdot (2m+M)$$

Quindi basta $\frac{1}{4}$ del peso da tenere sospeso per l'equilibrio.
Aumentando il numero di ruote nel paranco, la forza sufficiente a garantire l'equilibrio diminuisce ancora, avendo una specie di moltiplicatore che garantisce l'equilibrio nonostante la forza impiegata sia più piccola della forza che deve controbilanciare.

EQUILIBRIO DI UNA SCALA





μ_1 e μ_2 sono i coefficienti di attrito dei due assi

Il ragionamento da fare su questo sistema può essere basato sui lavori virtuali

La proiezione orizzontale della scala in generica posizione è data da $x = L\cos\alpha$

$$x = L\cos\alpha$$
$$y = L\sin\alpha$$

Spostando a dx l'appoggio sulle x, cambia l'inclinazione α:

$$dx = -L\sin\alpha\, d\alpha \quad \text{e analogamente cambia le } y:$$
$$dy = L\cos\alpha\, d\alpha$$

Il punto h a metà della scala è dato da:

$$h = \frac{L}{2}\sin\alpha \quad \text{e lo spostamento determina un } dh \text{ conseguente ed } d\alpha$$

$$dh = \frac{L}{2}\cos\alpha\, d\alpha \quad \text{e siccome lì è applicato il peso determino un}$$

certo lavoro a carico della forza peso, cioè

$$d\mathcal{L}_p = P\,dh = P\frac{L}{2}\cos\alpha\, d\alpha$$, devo controbilanciare questo lavoro con il lavoro dei vincoli, cioè

$$d\mathcal{L}_{v1} = -R_{1\parallel}\, dx = R_{1\parallel} \cdot L \cdot \sin\alpha\, d\alpha$$

$$d\mathcal{L}_{v2} = \underbrace{-R_{2\parallel}}_{\text{componente verticale della forza esercitata dalla reazione vincolare}}\, dy = -R_{2\parallel}\, L \cos\alpha\, d\alpha$$

Il lavoro dei vincoli è esercitato nei punti di appoggio. Gli appoggi sono con attrito e quindi ci avrò una componente che è una forza orizzontale esercitata dal vincolo che esiste perché c'è l'attrito. L'attrito dà una forza, denominata

$\underbrace{R_{1\parallel}}_{\text{parallela}}$

E lo stesso ragionamento vale per la verticale.

Le due quantità devono essere uguali:

$$d\mathcal{L}_{e} = -d\mathcal{L}_{v}$$

$$\left(\frac{P}{2}\cos\alpha + R_{1\parallel}\sin\alpha - R_{2\parallel}\cos\alpha\right) L\, d\alpha = 0$$

Notiamo che la componente normale nel punto 1 ($R_{1\perp}$) della reazione vincolare deve essere la differenza fra il peso che agisce verticalmente e la componente verticale dell'azione sul punto di appoggio sulla parete verticale:

$$P - R_{2\parallel} = R_{1\perp}$$

e, analogamente, nel punto di appoggio in basso si ha che la forza di attrito è uguale alla forza normale moltiplicata per il coefficiente di attrito sul pavimento:

$$R_{1\parallel} = \mu_1 \cdot R_{1\perp}$$

e, analogamente sulla parete la forza parallela verticale è uguale al coefficiente di attrito moltiplicato per la forza normale sulla parete:

$$R_{2\parallel} = \mu_2 \cdot R_{2\perp}$$

e deve valere l'uguaglianza

$$\underbrace{R_{2\perp} = R_{1\parallel}}_{\text{perché è garantito l'equilibrio}} = \mu_1 R_{1\perp}$$

e mettendo insieme tutte le uguaglianze notiamo che:

$R_{2\parallel} = \mu_2 \mu_1 R_{1\perp}$ e si sostituiamo nelle equazione di prima, troviamo che:

$P = R_{1\perp}(1+\mu_1\mu_2)$ ovvero il peso è uguale alla reazione normale nel punto di appoggio in basso moltiplicato per $1+\mu_1\mu_2$ e, alla fine mettendolo nell'eq. dell'equilibrio, abbiamo

$(1-\mu_1\mu_2)\cos\alpha + \mu_1 \sin\alpha = 0$ questa relazione che ci fornisce la tangente dell'angolo che garantisce l'equilibrio della scala:

$|\tan\alpha| \leq \dfrac{1-\mu_1\mu_2}{\mu_1}$ $\mu_1 = 0$ scala verticale e $\tan\alpha = \infty$

Lez. 18 MECCANICA DEI FLUIDI

Prof. Angelo Taraglio
42'32"

COSA È UN FLUIDO
LA PRESSIONE
UNITÀ DI MISURA DELLA PRESSIONE
PRINCIPIO DI PASCAL
IL MARTINETTO IDRAULICO

COSA È UN FLUIDO

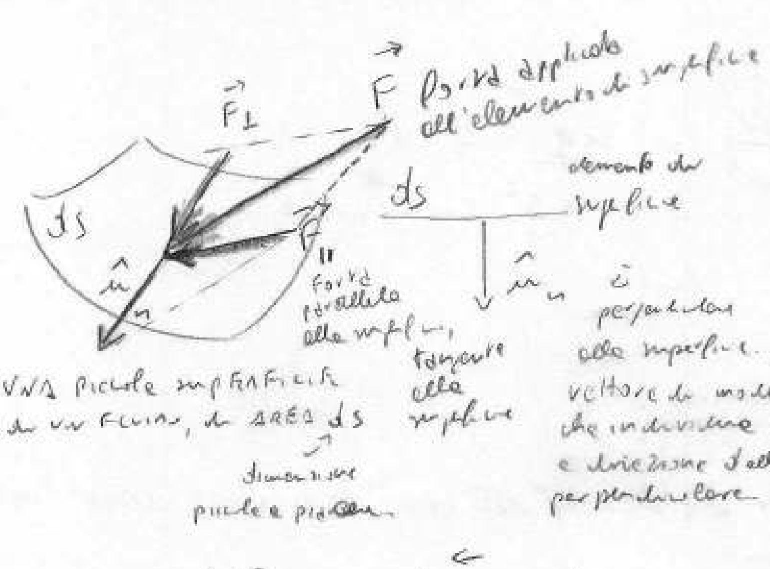
HA A CHE FARE CON GLI STATI DI AGGREGAZIONE DELLA MATERIA!

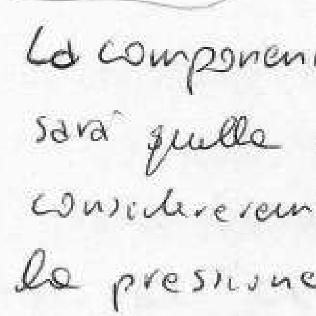
SOLIDO	volume e forma propri	
LIQUIDO	volume proprio e forma del recipiente	FLUIDI
GAS	volume e forma del recipiente	FLUIDI

LE CONSIDERAZIONI SUCCESSIVE VARRANNO PREVALENTEMENTE PER I LIQUIDI

Ci chiediamo se il vetro è un solido o un liquido.
In un solido molecole e atomi sono disposti in uno schema regolare (cristallino)
Il vetro ha una disposizione non regolare delle molecole che lo compongono, tipica dei liquidi.

LA PRESSIONE





La componente normale sarà quella che considereremo per definire la pressione

$$p = \frac{dF_\perp}{dS} = \frac{d\vec{F} \cdot \hat{u}_n}{dS} = \frac{dF\cos\theta}{dS} = \frac{dF_\perp}{dS} \qquad 18.1$$

prodotto scalare

La pressione non è un vettore

Essa non ha una direzione o un verso, le forze le hanno.
La pressione è una sorta di misura di intensità di un effetto che si ottiene facendo il rapporto tra una forza e una superficie, ma quello che prendiamo in considerazione non è il vettore forza, ma è la sua componente normale alla superficie.
Il rapporto dà una grandezza fisica che non è un vettore, non ha una direzione o un verso anche se si esercita su qualche cosa, su una superficie e comunque agisce in un senso o un altro, ma non è rappresentabile mediante un vettore

L'azione di un fluido su una parete è sempre una spinta.
La pressione preme sempre, non può tirare. È sempre positiva.

UNITÀ DI MISURA DELLA PRESSIONE

Dimensioni:
NEL SISTEMA INTERN.:

$$[p] = \frac{[F]}{\underbrace{[l^2]}_{\text{superficie}}} = \frac{[m]\cdot[l]}{[l]^2\cdot[t]^2} = \frac{[m]}{[l]\cdot[t]^2}$$

Unità di misura SI:

$$\frac{N}{m^2} = \frac{kg}{m \times s^2} = Pa$$

forza, area, massa, lunghezza, tempo^2

Pascal

ALTRE UNITÀ:

bar $= 10^5$ Pa (equivalente alla pressione dell'aria intorno a noi, 100000 Pascal)

Peso di 1 kg massa sulla superficie della terra

$$\frac{kg_f}{cm^2} = \frac{g\,N}{10^{-4}\,m^2} = 9.8 \times 10^4\ Pa$$

$atm = 101.325\ Pa$
↳

$$torr = \frac{atm}{\underset{\text{pressione di 1 mm di Mercurio}}{760}} = mm_{Hg} = 133{,}322\ Pa$$

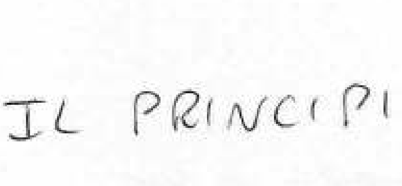
IL PRINCIPIO DI PASCAL

Le Ipotesi: Liquido perfetto (niente interazioni di taglio), ovvero è solo in grado di premere.

Liquido incomprimibile (volume invariante)

Liquido "non pesante" (la massa non entra in gioco)

Condizioni statiche



insieme di forze su un oggetto immerso in un liquido

Abbiamo un oggetto immerso in un liquido e su di esso il liquido esercita un insieme di forze perpendicolari; il sistema è in equilibrio, quindi la somma delle forze su tutte le superfici dell'oggetto in studio è una risultante nulla:

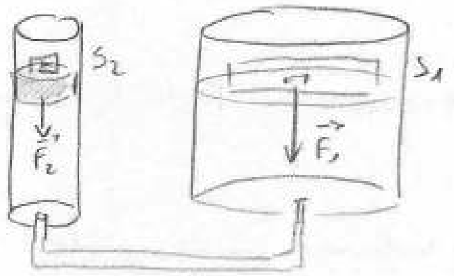
$$\vec{R} = \underbrace{\oint}_{\text{superficie chiusa}} d\vec{F} = 0 \qquad p \Rightarrow \text{omogenea}$$

Ma questa conclusione vale a qualunque scala. L'azione esercitata sulla parete esterna del luogo è una risultante nulla

Dobbiamo immaginare $d\vec{F}$ come il prodotto della pressione per l'elemento d'area in considerazione ($dF = p \cdot dS$)

Per poter avere equilibrio a prescindere da qualunque orientamento essa l'elemento di superficie che stiamo considerando possiamo considerare che la pressione essa lo stesso valore in qualunque punto del fluido

IL MARTINETTO IDRAULICO



S_1 e S_2 sono due superfici su cui poggiano due masse diverse tra loro.

LA PRESSIONE SUL CILINDRO DI SINISTRA È:

$$P_2 = \frac{F_2}{S_2}$$

e QUELLA SUL CILINDRO A DESTRA È:

$$P_1 = \frac{F_1}{S_1}$$

Il principio di Pascal ci dice che la pressione è la stessa in qualunque punto del fluido, in entrambi i cilindri:

$$P_1 = P_2 = P \quad \text{e quindi}$$

$$\frac{F_2}{S_2} = \frac{F_1}{S_1} \quad \text{, per cui}$$

$$F_2 = F_1 \cdot \frac{S_2}{S_1}$$

, da cui si vede che, essendo S_2 molto più piccola di S_1, riesco a tenere in equilibrio il sistema con una piccola forza che ne contrasta una molto grande in virtù del fatto che l'intermediario è un fluido e che quindi è la pressione a trasmettere l'effetto e determina una forza maggiore o minore a seconda delle superfici su cui agisce.

LEZ. 19: IDROSTATICA DEI FLUIDI PESANTI

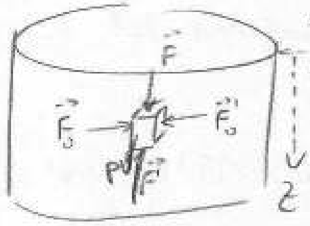
Prof Angelo Tartaglia
39'48"

La legge di Stevino
Il paradosso idrostatico
La pressione atmosferica
Barometro

LA LEGGE DI STEVINO

PER LA LEGGE DI PASCAL, IN UN FLUIDO NON PESANTE LA PRESSIONE HA LO STESSO VALORE IN TUTTI I PUNTI.

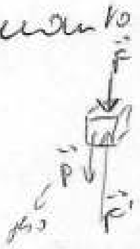
Abbiamo un contenitore con un fluido in equilibrio sotto l'azione del proprio peso.



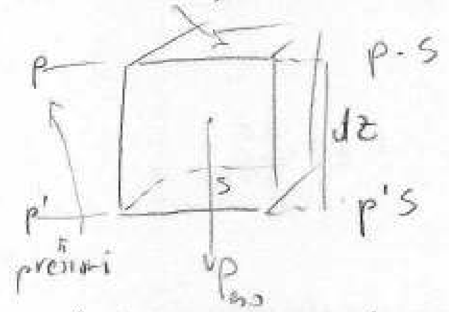
Tutte le forze sul volume si bilanciano

$$\vec{F}_0 = -\vec{F}_0'$$

Viene isolato un piccolo volume all'interno. La sua caratteristica è quella di essere in equilibrio. Le forze esercitate dal resto del liquido sull'elemento sono in equilibrio per le superfici verticali. Quelle esercitate sulle facce superiore sono in equilibrio, ma non sono uguali, in quanto entra in gioco il peso P dell'elemento considerato.



$$\vec{F} + \vec{P} = -\vec{F'}$$



$p \neq p'$ $\qquad p' > p$

$$dV = S \times dz$$

$$\underset{\text{peso}}{P} \rightarrow \underset{\text{densità }(\rho)}{\rho}\ \underset{\text{acc.}}{g}\ \underbrace{dV}_{\text{elemento di volume}} = \rho g S \times dz$$

massa del liquido considerato

$\underset{(\rho)}{\rho}\, dV$ = massa del liquido

L'equilibrio diventa:

$$F = pS \qquad F' = p'S$$

Forza esercitata sulla faccia sup.

$$p + \rho g\, dz = p' \Rightarrow dp = \rho g\, dz$$ } è una eq. differenziale

p → pressione; ρ → ro; dp → $p - p'$ pressione

La pressione all'altezza z per la superficie + $\rho g S dz$ = alla forza verso l'alto $p'(z') \cdot S$

$$\frac{dp}{dz} = \rho g$$ (p: pressione)

Integrando rispetto a z ricavo p(z) la legge con cui la pressione varia con la profondità all'interno del liquido.

LA PRESSIONE IDROSTATICA IN UN FLUIDO PESANTE È:

$$p = p_0 + \rho g z$$

p_0: costante di integrazione, è LA PRESSIONE CHE SI APPLICA ALLA SUPERFICIE LIBERA DEL LIQUIDO

$z = 0 \Rightarrow$ essere sulla superficie

ALLO SCENDERE LA PRESSIONE AUMENTA

Esempio: calcolare a quale profondità la pressione è doppia di quella atmosferica.

$p = p_0 + \rho g z$ $\qquad \underbrace{\Delta p}_{\text{differenza di pressione}} = p - p_0 = \rho g \underbrace{\Delta z}_{\text{differenza di profondità}}$

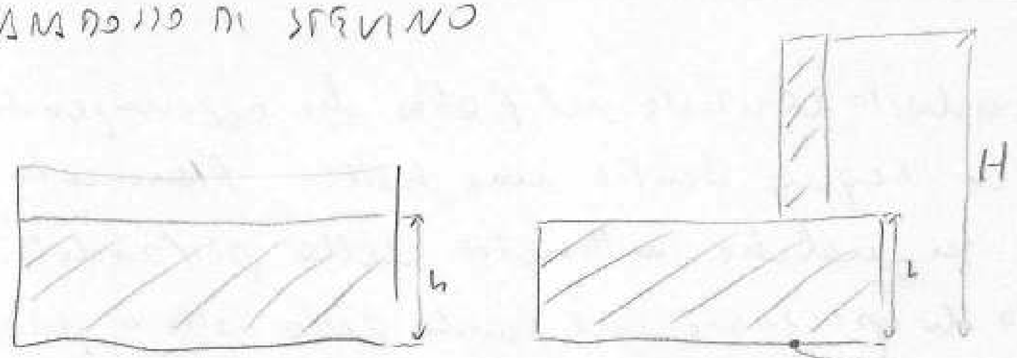
quindi pongo $\Delta p = p_0$ — La pressione alla quota 0 = pressione atmosferica

$$p_0 = \rho g \cdot \Delta z \qquad \Delta z = \frac{p_0}{\rho g} \sim \frac{10^5\,Pa}{10^3 \cdot 10} \sim 10\,m$$

(10^3: densità acqua; 10: g 9,8)

quindi ogni 10 m in basso la pressione aumenta di 1 atmosfera

PARADOSSO DI STEVINO



Liquido posto in un contenitore non riempito completamente.

Stesso liquido in un contenitore riempito completamente

la pressione sul fondo è ≠ che nell'altro caso

Si aggiunge liquido, nel primo contenitore e riempire nel secondo con un tubo

$\Delta p_{fondo} \propto h$ proporzionale

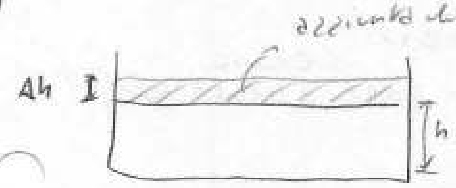
sul fondo rispetto alla pressione atmosferica:

La pressione è proporzionale a h per la legge di Stevino

$\rho \cdot g \cdot h$

$$\Delta p = \Delta p_{fondo} \frac{h+H}{h} > \Delta p_{fondo}$$

CASO RECIPIENTE A SX:



$p_{fondo} = \rho \cdot g \cdot h$

aggiunta di liquido ⇒ pressione maggiore sul fondo

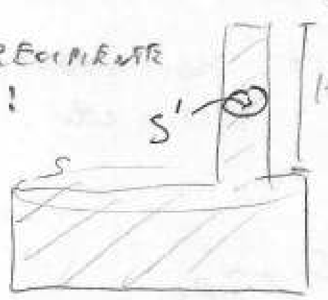
$p'_{fondo} = \rho g h + \rho g \cdot \Delta h$

conoscendo Volume e Sezione del recipiente: $\Delta h = \frac{V}{S}$,

quindi l'incremento di pressione è

$\rho g \cdot \Delta h = \rho g \cdot \frac{V}{S}$

CASO RECIPIENTE A DX:



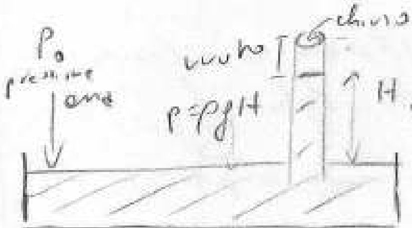
$\Delta p = \rho \cdot g \cdot H = \rho \cdot g \cdot \frac{V}{S'}$

$$\frac{\Delta p_{destra}}{\Delta p_{sinistra}} = \frac{H}{\Delta h} = \frac{S}{S'}$$

Dunque il paradosso consiste nel fatto che aggiungendo ad es. 1 lt di acqua dentro una botte, l'aumento si distribuisce su qualche millimetro della profondità e l'aumento di pressione sul fondo della botte è poca cosa. Se però la botte è coperta in modo che non ci sia aria e metto un tubo sottile con un litro d'acqua, allora la pressione sul fondo è molto maggiore. Se il rapporto è da un millimetro a un metro, cioè dal primo caso al secondo, sul fondo della stessa botte ho una pressione, nel secondo caso, 1000 volte più grande del primo caso.

Il paradosso, alla luce dell'analisi fatta, non esiste, in quanto quello che conta è la pressione che viene propagata, non le singole forze, né il peso dell'acqua aggiunta. Il peso dell'acqua aggiunta è lo stesso nei due casi, però quello stesso peso causa diverso incremento di pressione in un caso e nell'altro anche molto diverso tra di loro.

LA PRESSIONE ATMOSFERICA



H, altezza di equilibrio.

La colonna H in millimetri è bilanciata tra la pressione dell'aria e la colonna di mercurio

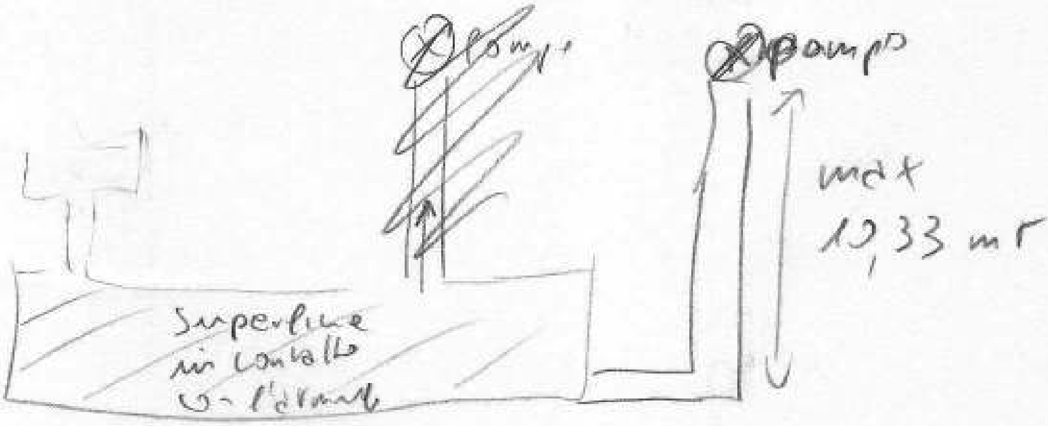
$$P_0 = \rho_{Hg} \cdot g \cdot H$$ barometro di Torricelli

H è 760 mm la colonna di mercurio

$$H_{Hg} = 760\ mm_{Hg}$$

$$H_{H_2O} = 10{,}33\ m_{H_2O} =$$

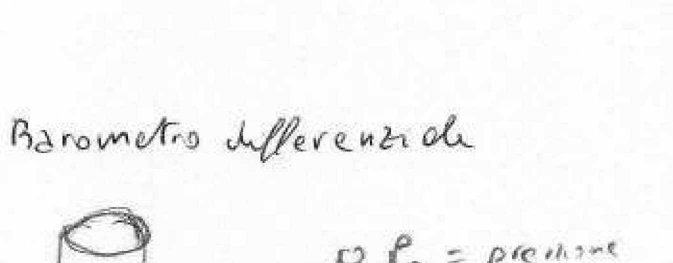
max altezza di sollevare acqua di una pompa aspirante.



BAROMETRI

sono i dispositivi per misurare le pressioni.

Barometro differenziale



Il fluido pesante chiude il condotto. Il fluido è sottoposto alla pressione p_1 a sinistra e della pressione p_0 a destra.
Può essere raggiunta una condizione di equilibrio solo nel caso che ci sia un dislivello tale da compensare la differenza di pressione tra i due ambienti a cui è collegato il barometro differenziale con il peso proprio della colonna di liquido che si trova al livello più basso.
In altre parole ho una differenza di pressione

$p_1 - p_0 = \rho g h$ che può essere mantenuta in condizioni di equilibrio se questa differenza di pressione è uguale a $\rho g h$, dove h è il dislivello.

Il dispositivo non misura pressioni assolute, ma misura differenze di pressione.

19.6

LEZIONE 20

Prof. A. Tartaglia
33'25"

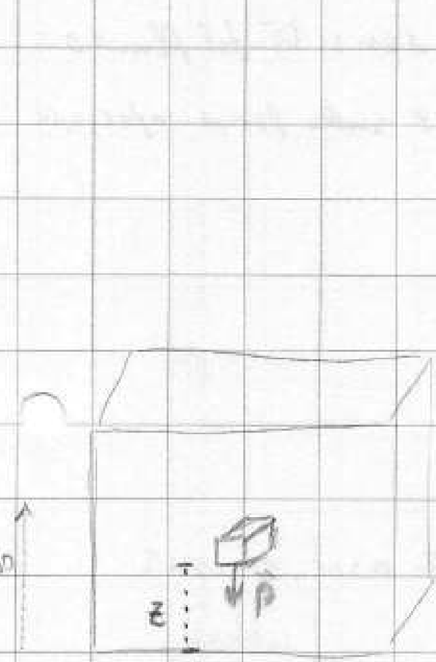
. La spinta idrostatica
. Il galleggiamento
. Galleggiare nell'aria

IL PRINCIPIO DI ARCHIMEDE

MECCANICA DEI FLUIDI - IDROSTATICA

ABBIAMO GIÀ VISTO LA LEGGE DI STEVINO CHE CI DICE COME SI DISTRIBUISCE LA PRESSIONE IN UN LIQUIDO PESANTE, ISOLANDO UNA PORZIONE DI LIQUIDO

IMMAGINIAMO ORA UN OGGETTO NON PERMEABILE IMMERSO IN UN LIQUIDO IN UNA CERTA POSIZIONE



L'OGGETTO HA UNA MASSA ED È QUINDI SOGGETTO ALLA FORZA PESO

ESSENDO IMMERSO IN UN LIQUIDO, ESSO È SOGGETTO ALLA PRESSIONE DEL LIQUIDO SULLE SUE PARETI. IL LIQUIDO ESERCITA UNA PRESSIONE TUTTO ATTORNO A SÉ.

SIA z LA QUOTA A PARTIRE DAL FONDO

LA PRESSIONE CHE IL LIQUIDO ESERCITA TUTTO ATTORNO A SÉ È FUNZIONE DELLA POSIZIONE VERTICALE ALL'INTERNO DEL LIQUIDO

$p(z)$ è la pressione alla posizione z (Legge di Stevino)

$V = Sh$

$V = Sh$ volume dell'oggetto; S = superficie

L'EQUAZIONE DELLE AZIONI ESERCITATE SULL'OGGETTO, OVVERO LE FORZE ESERCITATE SULL'OGGETTO:

$$\vec{F} = [\underbrace{p(z)}_{}^{\text{pressione alla quota } z} S - p(z+h)S - P]\,\hat{u}_z$$

LA FORZA $\vec{F}$ È LA RISULTANTE DI PIÙ FORZE DIVERSE

$p(z)$ è la pressione alla quota z

$p(z)S$ è l'azione sulla faccia inferiore

$p(z+h)S$ è l'azione sulla faccia superiore, che agisce verso il basso

$\hat{u}_z$ è il versore che agisce verso l'alto

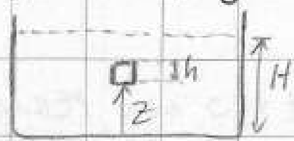
Se $F \neq 0$ (non è in equilibrio), tale forza produce un effetto dinamico, un movimento e l'oggetto salirà o scenderà.

$F > 0 \Rightarrow$ oggetto sale verso l'alto

$F < 0 \Rightarrow$ oggetto scende verso il fondo

L'espressione di F può essere riscritta chiamando in causa la legge di Stevino e introducendo la densità del fluido:

$$p(z) = \overset{\text{densità del}}{\rho}\, g\,(H-z)$$ pressione alla quota z sulla faccia inferiore.



$$p'(z) = \rho g \underbrace{(H-z-h)}_{\text{quota della faccia superiore del fondo}}$$

PER CALCOLARE LA PRESSIONE SULL'OGGETTO OCCORRE MOLTIPLICARE LA PRESSIONE PER LA SUPERFICIE:

$$\underbrace{\rho g (H-z) S}_{\text{pressione sup. inf}} - \underbrace{\rho g (H-z-h) S}_{\text{pressione superf sup}} - \overset{\text{peso}}{P} = \overset{>0 \Rightarrow \text{galleggia},\ <0 \Rightarrow \text{affonda}}{F}$$

è una spinta

Forza risultante sull'oggetto
F>0 tendenza al galleggiamento
F<0 tendenza all'affondamento

LA SPINTA F PUÒ O NON PUÒ COMPENSARE IL PESO.

PUÒ ESSERE RACCOLTO $\rho g S$ A FATTOR COMUNE, OTTENENDO:

$$\underbrace{\rho g S \cdot h}_{} - P = F$$

ESPRIME L'EFFETTO DELL'INTERAZIONE TRA IL FLUIDO E IL CORPO IMMERSO
RAPPRESENTA IL PESO DI UNA QUANTITÀ DI LIQUIDO CHE OCCUPEREBBE LO SPAZIO CHE È OCCUPATO DAL CORPO IMMERSO

n.b. : $S \cdot h$ è il volume del corpo immerso
ρ è la densità del liquido

dunque $\rho \cdot S \cdot h$ è la massa del liquido spostato per far posto all'oggetto immerso. Questo moltiplicato per g è quindi il peso del liquido spostato. Questo agisce sull'oggetto immerso in verso opposto a quello che fa il peso poiché contrasta il peso verso dell'oggetto che tira verso il basso.
Questa spinta che chiamiamo SPINTA IDROSTATICA agisce verso l'alto.

Il principio di Archimede afferma che un oggetto immerso in acqua, in un liquido, subisce una spinta dal basso verso l'alto che è pari, come grandezza, al peso del liquido che è stato spostato.

Peso del liquido spostato $\rho \cdot g \cdot h \cdot S$

Peso dell'oggetto immerso $P_{peso} = \langle \rho \rangle \cdot g \, h \cdot S$ densità media dell'oggetto, include anche i vuoti

Se l'oggetto è omogeneo, il peso è $P_{oggetto} = \rho_* \cdot V_{volume}$ (densità) e la spinta netta dell'oggetto immerso è $\underbrace{\rho \cdot g \cdot S \cdot h}_{\text{spinta idrostatica}} - \underbrace{\rho_* g \cdot S \cdot h}_{\text{peso}} = F$, che è la spinta risultante. $S \cdot h$ è il volume V

Raccogliendo a fattor comune, tenendo conto che $S \cdot h$ è il volume:

$$g \cdot V \, (\rho - \rho_*) = F$$

ρ densità del liquido, ρ_* densità dell'oggetto

Se la densità dell'oggetto è maggiore di quella del liquido allora l'oggetto affonda, viceversa galleggia:

$$\rho_* > \rho \Rightarrow \text{oggetto affonda}$$

ρ_* densità oggetto, ρ densità liquido

IL GALLEGGIAMENTO

L'oggetto subisce una spinta perché prende il posto dell'acqua; è l'acqua spostata che determina la spinta.
Ma per spostare dell'acqua non è vero che devo mettere un oggetto pieno, massiccio; può bastare un oggetto cavo, ma impenetrabile. Se l'oggetto è cavo allora la spinta

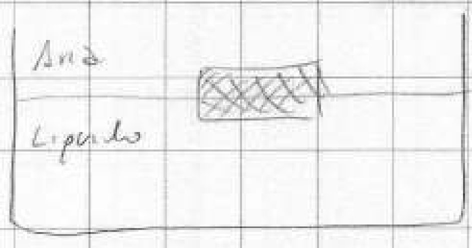
20.7

idrostatica non cambia, poiché essa dipende solo dal volume.
Il peso dell'oggetto cambia se è cavo o non lo è.
Questo ci porta ad introdurre la densità media dell'oggetto:

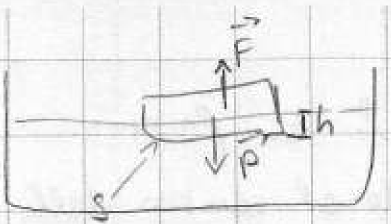
$$\langle \rho_* \rangle = \frac{P}{V}$$, P = peso, V = volume occupato dell'oggetto

Se l'oggetto è cavo allora il volume è grande e quindi la densità media è piccola e anche se le pareti sono di acciaio il volume totale non è quello delle pareti
ma è quello racchiuso dalle pareti per cui la densità media non sarà quella dell'acciaio ma sarà P/V.
La spinta che una nave riceve è proporzionale al volume che è dovuta all'acqua, al liquido che è stato tolto dall'oggetto immerso.
Dunque la spinta netta verso l'alto è:

spinta netta verso l'alto $$F = (\underset{\text{densità del liquido}}{\rho} - \underset{\text{densità media dell'oggetto}}{\langle \rho \rangle})\, g \cdot h \cdot S$$



Il galleggiamento: qualcosa immerso lo è parzialmente ed è una condizione di equilibrio. Nel galleggiamento una parte dell'oggetto è immersa e una parte è emersa e c'è un certo rapporto tra la parte emersa e quella immersa che determina la condizione di equilibrio



La parte immersa è soggetta ad una spinta idrostatica dal basso verso l'alto che è misurata dal volume del liquido spostato, dalla sola parte immersa.

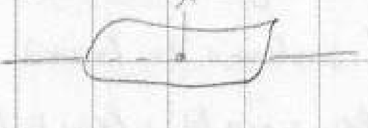
La spinta dipende da come è fatto l'oggetto e la parte immersa sarà il galleggio.

La parte immersa determina una spinta verso l'alto che è la spinta di galleggiamento, F.

L'equilibrio si ha quando la spinta di galleggiamento è uguale e opposta alla forza peso

$$\vec{F} = -\vec{P} = \underset{\text{densità del liquido}}{\rho_l}\, g\, \underbrace{S\, h}_{\text{volume}}\, \hat{u}_r = \text{peso del liquido spostato}$$

L'oggetto galleggia perché il volume spostato è grande abbastanza da compensare totalmente il peso dell'intero sistema

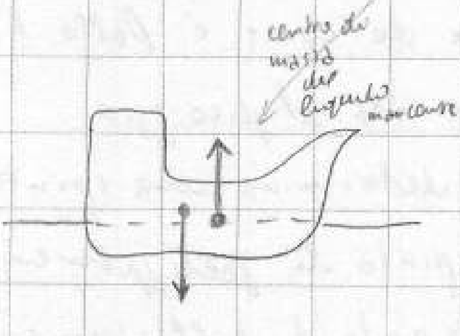


In un natante la parte immersa dà luogo ad una spinta verso l'alto che è applicata al centro di massa del liquido che non c'è.

Questa parte è dovuta alla pressione che agisce sulle pareti laterali e soprattutto su quella di fondo; quelle laterali non partecipano alla spinta e tendono a schiacciare la nave.

La spinta è la risultante di tante forze, la forza di pressione ed equivale al peso del liquido che manca, che è stato tolto.

Il peso del liquido mancante, se lì ci fosse stato il liquido, sarebbe applicato al centro della forza peso che è il baricentro, il centro di massa del liquido. La forza agisce verso l'alto e deve contrastare il peso della intera nave.



Il peso della nave è applicato al centro di massa della nave, il baricentro che, in genere, non coincide col centro del liquido che è stato spostato.
La forza peso della nave è diretta verso il basso ed è applicata, in genere in un punto diverso dal punto in cui è applicata la forza che è la spinta verso l'alto.

Se le due forze non agiscono sulla stessa direzione, esse costituiscono una coppia e una coppia tende a produrre una rotazione che tende ad azzerare la coppia.
La coppia tende a far girare il tutto fino a quando il centro a cui è applicata la forza peso del sistema si trova più in basso del centro a cui è applicata la spinta idrostatica.
In quella condizione la situazione è stabile perché la coppia è 0 e se si ha qualche piccola oscillazione attorno all'equilibrio, generalmente la coppia compare e tende a riportare il tutto nella posizione giusta

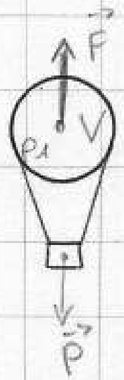
Se il baricentro di tutta la struttura è più alto del centro di spinta allora la nave si può capovolgere in quanto

la coppia che compare non tende più a riportare all'equilibrio ma tende ad allontanare dall'equilibrio.
Questo perché il baricentro g è più in alto del baricentro di spinta delle forze idrostatiche e il risultato di una piccola oscillazione produce un risultato diverso, la barca così si capovolge.

GALLEGGIARE NELL'ARIA

La spinta è aerostatica, $\vec{F}$

ρ_0



V = volume della sfera
ρ_1 = densità della sfera
ρ_0 = densità dell'aria
$\vec{F}$ = spinta aerostatica

Quando F è uguale e opposta a P c'è equilibrio.

condizione di equilibrio

$$F = (\rho_0 - \rho_1)\, g\, \underbrace{V}_{\text{volume}} = P$$

è la formula vista prima

Se uso l'elio nella sfera, la sua densità è circa $\frac{1}{1000}$ di quella dell'aria: $\rho_{He} = \frac{1}{1000}\rho_{aria}$ (n.b.: $\rho_{aria} \approx 1,3\ kg/m^3$)

Il galleggiamento si ottiene quando:

$$(\rho - \rho_{He})\, g\, V = P$$

sia $P \approx 10^4\ N$ (circa), circa 1000 kg

$$V = \frac{P}{\rho g} \simeq \frac{10^4}{1\,kg/m^3 \cdot 10} = 10^3\ m^3$$

(ρ_{He} trascurato, circa $\frac{1}{1000}$)

, ovvero con $10^3\ m^3$ di pallone aerostatico si solleva una tonnellata

Una sfera di $10^3\ m^3$ ha un raggio come segue:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 10^3$$

$$R = 10\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}} \simeq 6\ m$$

20.7

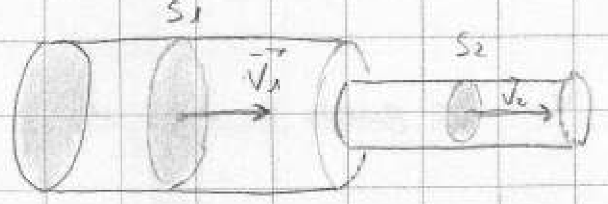
Per salire o scendere occorre modificare la condizione di equilibrio.
Si può agire sul volume, aumentando il volume si aumenta la spinta; diminuendolo si diminuisce la spinta.
Si può agire anche sul peso, diminuendolo si sale.
Nel salire la pressione interna del pallone e dell'atmosfera cambiano e la densità dell'atmosfera diminuisce con l'altezza

LEZIONE 21 L'IDRODINAMICA

Prof A. Tartaglia
4.2'13
LA PORTATA DI UN CONDOTTO
L'EQ. DI BERNOULLI
TUBO DI VENTURI

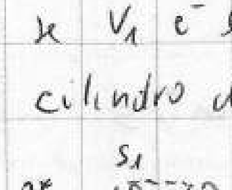
FLUSSO STAZIONARIO

Si consideri un tubo in cui scorra un liquido ~~e ...~~ ~~velocità costante, ovvero~~ il flusso sia stazionario.



Il tubo ha dimensioni diverse, siano S_1 e S_2 le aree delle due sezioni, $S_1 > S_2$ e v_1 e v_2 le velocità.
Si considera che il volume si conservi e il liquido sia incomprimibile.

Il flusso ha una velocità data.
Supponendo un tempo dt, arbitrariamente piccolo, la quantità di acqua che si sposta sarà data da $v_1 \, dt \cdot S_1$ se v_1 è la velocità del flusso e fisicamente sarà un cilindro di acqua.



v_1 = velocità del flusso ; S_1 = sezione; dt = intervallo di tempo
Il volume di acqua sarà $S_1 \underbrace{v_1}_{\text{velocità}} dt = \underbrace{dV_1}_{\text{volume}}$
Se vogliamo studiare quella quantità di acqua, e la troviamo in sezioni diverse del circuito. Dopo un certo tempo l'acqua sarà arrivata nella sezione più piccola e, se è la stessa acqua, dovremo avere un volume che occupa che è lo stesso; tale volume sarà dato da $S_2 v_2 \cdot dt$, dove S_2 e v_2 sono la sezione e la velocità in quella sezione.
Cioè i volumi di acqua oggetto di studio sono uguali:

$$dV_1 = S_1 v_1 dt = dV_2 = S_2 v_2 dt$$

dV_1 ↓ volume, dV_2 ↓ volume

Semplificando il tempo, l'incomprimibilità del liquido implica dunque:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

Questa uguaglianza ci porta al concetto di portata:

$$v_2 = \frac{S_1}{S_2} v_1$$ e questo ci dice che se $S_2 < S_1$ allora $v_2 > v_1$.

L'acqua corre più veloce in un ruscello dove ci sono strozzature. Questa è manifestazione della incomprimibilità dell'acqua.

La portata Q è data da $S \cdot v$ ed è costante:

$$Q_1 = Q_2 = Q \quad \text{dove } Q_1 = S_1 \cdot v_1 \text{ e } Q_2 = S_2 \cdot v_2$$

La portata rappresenta il volume diviso il tempo che c'è voluto perché questo volume riuscisse a transitare attraverso una certa sezione:

$$\underset{S \cdot v}{Q} = \frac{dV}{dt}$$ Portata volumetrica, m^3/s (metri cubi al secondo)

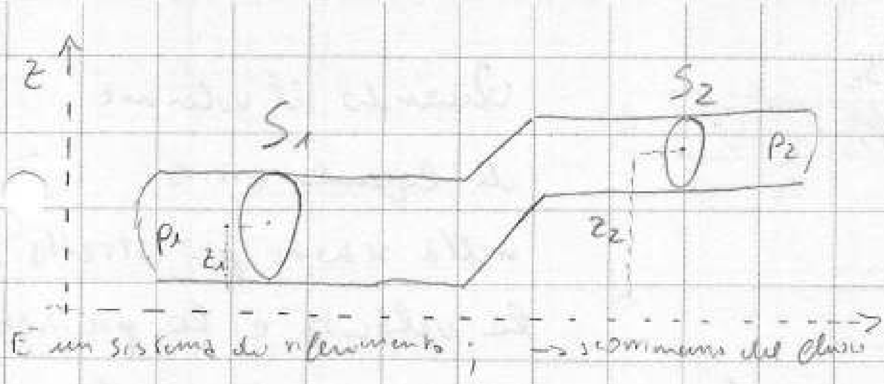
Moltiplicando questa quantità per la densità del fluido ottengo una portata non più in m^3 ma diventa in kg/s, ovvero portata in massa:

$$Q_m = \rho \cdot Q$$

portata di massa

L'EQUAZIONE DI BERNOULLI

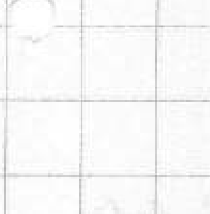
Governa il movimento dei liquidi considerando il contenuto energetico che è associato ad un certo fluido e sostanzialmente determina un bilancio energetico.



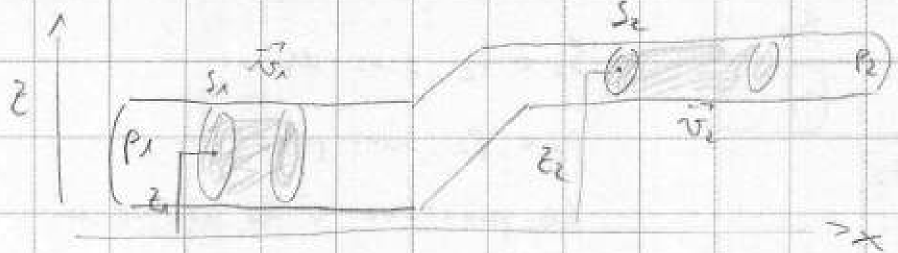
S_1 e S_2 sono sezioni
p_1 e p_2 sono pressioni
La pressione è la stessa in tutte le parti di un liquido se non si conta la forza peso.
In questo sistema ammettiamo la presenza del peso.

La pressione p_1 è diversa dalla pressione p_2 poiché le quote sono diverse quindi agisce la forza peso.

Nel condotto c'è un flusso di liquido che scorre nel condotto.
Considereremo una elongazione dx lungo l'asse x invece di un dt.
In questo modo stiamo isolando un certo volume di liquido che è quello su cui facciamo l'analisi.



Le forze nel volume sono ad altezza diversa, ma faremo riferimento alla quota media, ovvero alla quota dell'asse del condotto.
Il volume di liquido possiede una energia potenziale gravitazionale e, poiché si muove, allora possiede una energia cinetica e, poiché c'è una pressione allora ~~c'è~~ implica un lavoro ~~[illegible]~~ delle forze dovuto alla pressione.
Questo ragionamento si può fare in entrambe le sezioni e si può immaginare lo stesso volume di liquido prima nella sezione a sinistra e poi in quella a destra



Quando il volume di liquido arriva nella sezione più stretta, la velocità e la pressione saranno cambiate rispetto a quando era nella sezione iniziale.

Energia potenziale gravitazionale

per definizione $W = mgz$; nel nostro caso: $m = \rho \underset{\text{densità}}{} V_{\text{volume}}$

$dW_1 = \underset{\text{densità del liquido}}{\rho} \cdot g \cdot z_1 \cdot S_1 \cdot dx_1$

Per la validità della formula, lo spessore del volume deve essere infinitesimo.

$$dV = S \cdot \underbrace{dx}_{\text{spessore infinitesimo}} \Rightarrow \underbrace{dW}_{\text{energia potenziale gravitazionale infinitesima}} = \underbrace{\overset{\text{densità}}{\rho} \cdot \overset{\text{volume}}{S\,dx}}_{dm} \cdot g \cdot z$$

Energia cinetica dovuta al movimento

$$dW_{1cin} = \frac{1}{2} \rho v_1^2 \cdot S_1 \cdot dx_1$$

La formula sull'energia cinetica deriva dal seguente ragionamento:

$$W_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

la massa quella che consideriamo è quella di un quantitativo di liquido arbitrariamente piccolo.

$$dW_c = \frac{1}{2} \cdot dm \cdot v^2$$

questo è scritto come

$$\underbrace{\rho}_{\text{densità}} \cdot \underbrace{S \cdot dx}_{\text{volume}}$$

Ma, per fare un bilancio energetico, dobbiamo mettere in conto altro, ovvero la pressione sulla colonna in movimento di tutto il liquido a valle (a sinistra) del volume e quella del liquido a monte, a destra.

La pressione dal lato sinistro è stata chiamata p_1 e dal lato destro p_2.

Sono pressioni che agiscono su qualunque superficie immersa nel liquido, in particolare su S_1, che è una superficie in movimento alla velocità v.

La pressione applicata ad una superficie equivale a dire che c'è una spinta, una forza normale su quella superficie e quando abbiamo una forza applicata ad un punto in

21.4

movimento questa forza sta compiendo un lavoro.
Dunque nel bilancio energetico deve essere considerato anche il lavoro che fa la forza quando il liquido si sposta di una quantità dx_1.
Così lo spostamento dx_1 è in corrispondenza di un lavoro fatto dalla forza di pressione p_1.

Lavoro dovuto alla forza di pressione:

$$dL_1 = F_1 \cdot dx_1 = p_1 \cdot S_1 \cdot dx_1$$

Tutto il ragionamento fatto per la sezione S_1 valgono per la S_2:

$$dW_2 = \rho g z_2 S_2 dx_2$$ Energia potenziale gravitazionale

$$dW_{2\,cin} = \frac{1}{2} \rho v_2^2 S_2 dx_2$$ Energia cinetica dovuta al movimento

$$dL_2 = - p_2 S_2 dx_2$$

p_2 contrasta l'avanzamento, si oppone

Nel mettere a confronto le situazioni nella sezione S_1 e S_2 dobbiamo tener conto che vale il principio di conservazione dell'energia.

Conservazione dell'energia e del lavoro

$$\underbrace{dL_1 + dL_2}_{\text{somma algebrica}} = dW_2 + dW_{2\,cin} - dW_1 - dW_{1\,cin}$$

21.5

Abbiamo dunque

$$p_1 \cdot S_1\, dx_1 - p_2 \cdot S_2 \cdot dx_2 = \rho g z_2 S_2\, dx_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 S_2\, dx_2$$
$$- \rho g z_1 S_1\, dx_1 - \frac{1}{2}\rho v_1^2 S_1\, dx_1$$

E, riorganizzando, portando da una parte tutto quello che riguarda una sezione:

(1)
$$\underbrace{\boxed{p_1 S_1\, dx_1}}_{\text{Lavoro volume}} + \underbrace{\boxed{\rho g z_1 S_1\, dx_1}}_{\text{Energia Potenz. Gravitazionale}} + \underbrace{\boxed{\frac{1}{2}\rho v_1^2 S_1\, dx_1}}_{\text{Energia Cinetica}} =$$
$$= p_2 S_2\, dx_2 + \rho g z_2 S_2\, dx_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 S_2\, dx_2$$

(La $P_1 \times V_1$ è un Lavoro)

Vale la conservazione del volume nelle due sezioni.

Conservazione del volume:

$$S_1\, dx_1 = dV_1 = S_2\, dx_2 = dV_2 = dV$$

Dunque possiamo semplificare sui valori di volume, ottenendo:

stesse dimensioni

è una energia potenziale gravitazionale per unità di volume e ha le dimensioni di una pressione

(2)
$$\boxed{p_1} + \boxed{\rho g z_1} + \boxed{\frac{1}{2}\rho v_1^2} = p_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

pressione

densità

per unità di volume perché è derivato da una divisione per un volume

densità di energia, energia per unità di volume

ha le stesse dimensioni di una pressione

Questo risultato è conseguenza dei seguenti passaggi intermedi. 28'35"

per conservazione del volume, della portata, possiamo dire che

$$\underset{\text{sezione di monte}}{S_1}\, dx_1 = \underset{\text{sezione di valle}}{S_2}\, dx_2 \Rightarrow dx_2 = \frac{S_1}{S_2}\, dx_1$$

Se uso questa proprietà e torno alle equazioni del passaggio precedente, in cui a sx comparivano $S_1 dx_1$ e a dx $S_2 dx_2$; o sostituendo dx_2 con $\frac{S_1}{S_2} dx_1$, o considerando che quest quantità

Nella (1) compaiono tutti $S_1\, dx_1$ da una parte e tutti $S_2\, dx_2$ dall'altra; possiamo esprimere tutto in termini di dx_2; inoltre

$$S_1\, dx_1 = S_2\, dx_2 = dV$$, cioè esprime il volume

Il volume è lo stesso in tutti i termini, allora lo posso semplificare e quello che rimane è la (2).

è un unico volume dV, allora posso vedere che è lo stesso volume in tutti i termini della somma scritta prima. Essendo lo stesso in tutti i termini, lo posso semplificare

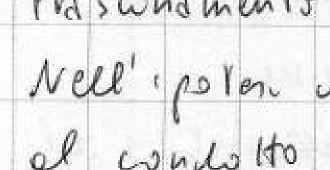
Tutti e tre i termini ai due membri della (2) hanno le dimensioni di una densità di energia, una energia per unità di volume e l'unità di misura è $J \cdot m^3$, Joule per metro cubo.

La equazione (2) al secondo membro ha una sezione presa a caso, dunque la (2) si legge in un modo che definisce l'equazione di Bernoulli, ovvero che

$$p \cdot \rho g z + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{costante} \qquad \text{Equazione di BERNOULLI}$$

Questo ragionamento vale per liquidi incomprimibili, vale per liquidi perfetti, dove non devono essere possibili azioni di trascinamento o azioni di taglio.
Nell'ipotesi di fluido perfetto le pressioni sono perpendicolari al condotto, non era ammessa nessuna forza parallela alla superficie su cui avviene l'interazione tra il fluido e la parete perché una forza come quella non sarebbe compensata da nulla e darebbe luogo ad un puro e semplice scorrimento.

Il ragionamento corrente è su un fluido in movimento



con la parete che delimita soltanto il fluido, non lo frena né lo accelera.
Il fluido ha una pressione che esercita sulle pareti verso l'esterno. Non c'è nessuna forza di impedimento al flusso del liquido.
Sotto queste ipotesi il fluido è perfetto.

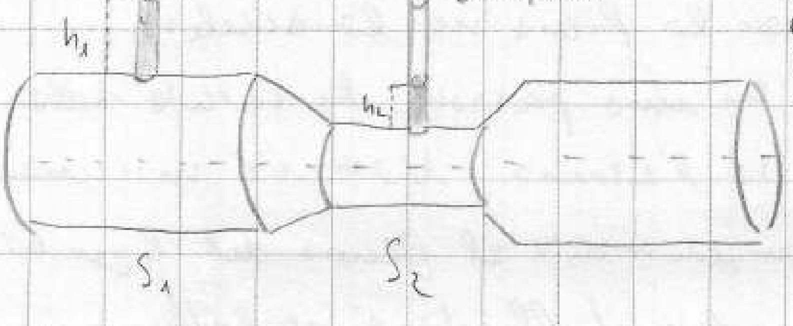
I liquidi reali possiedono una proprietà detta viscosità.
Nella realtà un liquido che scorre in una parete esercita una azione sulla parete e di conseguenza la parete reagisce sul liquido che scorre in un modo che succede come tra due solidi, tra i quali c'è una interazione di attrito.
C'è una specie di attrito anche tra il liquido e la parete del condotto entro cui scorre.
Inoltre anche le varie porzioni del liquido si frenano una rispetto all'altra.
Nel caso reale si sarebbe da considerare anche il lavoro che fanno le forze di attrito ovvero una dissipazione di energia, che è dovuta ad una forza che è sempre frenante e che, nella migliore delle ipotesi è proporzionale alla velocità con cui il liquido scorre rispetto alla parete con cui interagisce.
In realtà è proporzionale ad un coefficiente caratteristico del liquido, che chiamiamo viscosità, è proporzionale alla velocità e dipende da quanto è ampia la superficie su cui avviene l'interazione:

$$\bar{F} = -\eta S \bar{v}$$

$\bar{F}$ → Forza di attrito
$\bar{v}$ → velocità
S → superficie
η → viscosità

IL TUBO DI VENTURI (Applicazione Legge di Bernoulli)

31'05"



In questo sistema, in condizioni di equilibrio, il livello di risalita nei tubicini non è uguale e la differenza è dovuta alla legge di Bernoulli

Nel tubo di Venturi la legge di Bernoulli può essere scritta così:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

In questa equazione mancano i termini dell'energia potenziale gravitazionale perché il condotto è ad asse orizzontale e il liquido ha quindi lo stesso quota media in tutte le sezioni e dunque i due termini dell'energia potenziale gravitazionale hanno lo stesso valore e quindi vengono semplificati.

Il principio di conservazione del volume implica che dove la sezione è più stretta, la velocità deve essere maggiore. Quindi possiamo sostituire v_2 con una espressione in funzione di v_1, cioè

$$v_2 = \frac{S_1}{S_2} \cdot v_1$$

Inoltre sappiamo che la pressione in un liquido in quiete può essere scritta usando la formula di Stevino: (quella delle due colonnine)

$$p = \rho g h \qquad \text{Formula di Stevino}$$

La pressione alla base della colonnina, in cui il liquido è fermo, è la stessa pressione all'interno del condotto, quindi mettendo insieme tutte le informazioni ricaviamo che:

misuratore di portata

$$g(h_1 - h_2) = \frac{1}{2} v_1^2 \Big(\underbrace{\frac{S_1^2}{S_2^2}}_{\text{fattore geometrico, che dipende dalle sezioni}} - 1 \Big)$$

La misura delle due pressioni, data h_1 e h_2 ci informa sulla velocità nel condotto, conoscendo S_1 e S_2. Quindi tutto questo è un misuratore di portata

Questa equazione implica che con una misura di pressione differenziale ricaviamo la velocità che assumata alla sezione dice quanto è la portata nel condotto.

21.9

21.10

LEZIONE 22: I PRINCIPI DELLA TERMODINAMICA

Prof. A. Tartaglia
40'20"

Sistemi con un grandissimo numero di componenti

Gas perfetto: relazione tra pressione e temperatura

Energia interna

Calore

Il I° principio della termodinamica

SISTEMI CON UN GRANDISSIMO NUMERO DI COMPONENTI

Valutare tutti i parametri di un sistema con un numero molto elevato di componenti non è generalmente possibile.
Dunque si ricorre alla descrizione di tali sistemi usando quelli che vengono chiamati i:

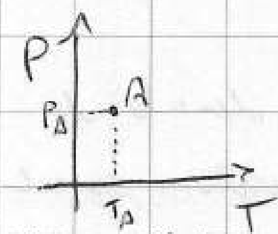
parametri di stato

Ad esempio, in una folla si può pensare alla densità di persone al metro quadrato. Aspettandosi un valore medio che non varia troppo. La variabile adottata non è una variabile specifica di ciascuno ma ci dà comunque delle informazioni. Tale variabile è una variabile di stato. Ci dà un'idea dello stato del sistema di elementi.
Ad esempio un'altra variabile di stato nello stesso contesto, la folla, potrebbe essere il livello sonoro che ci giunge alla postazione di osservatori. Anche questa variabile è una variabile di stato, di insieme. L'informazione che porta è quella di stabilire se c'è silenzio oppure bisbiglio, oppure canto, non dicendoci chi sta zitto, o bisbiglia, o canta.
Potremmo anche immaginare una variabile di stato come

la pressione esercitata su transenne di delimitazione.

Le variabili di stato descrivono un sistema con un numero elevato di elementi, non tenendo conto di ciascun elemento.
Esse ci danno informazioni sufficienti a capire lo stato del sistema

Tipicamente le variabili di stato vengono riportate su diagrammi e sono in genere due, una per ascisse e una per ordinata.
Ad esempio la pressione di un fluido sulle pareti di un recipiente in funzione della Temperatura, o del volume.



SPAZIO delle FASI

Data una coppia di valori (o una terna, ecc), diciamo che abbiamo individuato lo stato del sistema.
Ogni punto del grafico è uno stato del sistema

Lo spazio a cui un grafico del genere è associato, lo chiamiamo lo **spazio delle fasi**, che riporta delle variabili di insieme. Da non confondersi con lo spazio umano in cui individuiamo delle posizioni, che si chiama spazio delle configurazioni, che indica dove si trova un componente.

Vediamo quello che è il paradigma di un sistema termodinamico, che è il gas perfetto.

IL GAS PERFETTO

Il gas perfetto è una astrazione. È fatto di molecole tutte uguali, che non interagiscono tra di loro tranne urtarsi elasticamente tra di loro. I movimenti sono casuali. Le molecole sono considerate puntiformi.

Una variabile di stato può essere la pressione che il gas perfetto esercita contro una parete.
L'urto delle molecole di gas sulle parete è ipotizzato perfettamente elastico, la parete è rigida.
Nell'urto elastico abbiamo un cambiamento della quantità di moto di cui dispone il sistema

$$\delta_{\text{dx}} q_m = 2m|v_\perp|$$

L'urto è considerato con incidenza perpendicolare.

variazione della quantità di moto a seguito dell'urto contro la parete.

$mv_\perp$ è la quantità di moto perpendicolare alla parete; quando la particella rimbalza e torna indietro, possiede la stessa quantità di moto, ma di verso contrario:
$-mv_\perp$ quantità di moto dopo il rimbalzo
E la quantità di moto è la differenza tra queste due quantità, ovvero $2mv_\perp$

Quando in un oggetto c'è una variazione di quantità di moto, questo dà luogo ad una spinta.

Introduciamo allora il valor medio della quantità di moto in funzione del valor medio della velocità delle particelle:

$$\langle \delta_\downarrow q_m \rangle = 2m \langle |v| \rangle$$

Valor medio della quantità di moto trasferito alla parete.

Dunque, considerando tutte le particelle abbiamo che il valor medio della quantità di moto trasferito alla parete è:

$$\langle \delta q_m \rangle = 2 \cdot m \cdot \langle |v| \rangle$$

valor medio del valore assoluto della velocità della componente della velocità perpendicolare alla parete.

Ci chiediamo quanti urti, quanto trasferimento di moto, ci saranno in un tempo arbitrariamente breve.
Ovvero ci chiediamo quante molecole che stanno arrivando a colpire la parete si trovano a monte della parete per una profondità pari alla velocità per dt, ovvero una profondità dx con:

$$\underbrace{dx}_{\text{profondità}} = \langle |v| \rangle \cdot dt$$

Quindi che tutte le molecole a monte della parete ad una profondità pari a $\langle |v| \rangle \cdot dt$ riusciranno nel tempo dt ad urtare la parete e, sapendo quante sono le molecole, allora nel tempo dt ci sarà una variazione complessiva della quantità di moto del gas che è data dal valor medio della quantità di moto trasferita da una singola molecola moltiplicato per il numero di molecole che si trovano all'interno di un volume che ha come sua dimensione l'area della superficie investita, una porzione della parete per la profondità che corrisponde allo spazio percorso a quella velocità delle molecole

Quindi $\delta S \cdot \langle |v| \rangle \cdot dt$ che è un volume:

$$\delta S \cdot \langle |v| \rangle \cdot dt = dV$$ volume delle molecole che ce la fanno ad urtare la parete nel tempo dt

L'informazione che immaginiamo di avere è il numero di molecole per unità di volume che sono disponibili. Conoscendo la densità posso sapere quante molecole al metro cubo ci sono, moltiplicando il numero di molecole per metro cubo per il volume, ottengo il numero totale di molecole.

il numero è piccolo tanto quanto lo è dS e dt

n molecole per unità di volume

volume

$$d^2 N = \frac{n}{6} \, dS \langle |v| \rangle dt$$

profondità del volume

serve a ricordare che se la superficie inventata è arbitrariamente piccola ed il tempo anche, allora questo numero è due volte arbitrariamente piccolo.

$\frac{1}{6}$ appare in virtù del fatto che siamo interessati al solo numero di molecole che urteranno la parete. Esse non sono tutte. Immaginando di avere un ugual numero di molecole che si muovono in tutte le direzioni, ovvero le 3 dimensioni fondamentali, x, y, z, allora posso dire che $\frac{1}{3}$ di queste molecole si muoveranno lungo l'asse x, $\frac{1}{3}$ lungo y e $\frac{1}{3}$ lungo z. Ma di quel $\frac{1}{3}$ che si sta muovendo lungo l'asse x non tutte sono dirette verso la parete alla destra, qualcuna sarà diretta dalla parte opposta e se la distribuzione è casuale allora possiamo dire che metà saranno dirette a dx verso la parete e metà dalla parte opposta. Il risultato di tutto questo è che del totale delle molecole contenute nel cubo, soltanto $\frac{1}{6}$ urterà la parete a destra.

Una volta stabilito quante molecole urteranno la parete nel tempo dt possiamo chiederci quanto è la quantità di moto che viene trasferita alla parete in quel tempo dt. Ricordando nel frattempo che se prendiamo questa complessiva variazione di quantità di moto e la dividiamo per il tempo otteniamo la forza esercitata perpendicolarmente alla parete dal gas.

$$F_\perp = \frac{dq_m}{dt}$$

forza esercitata dal gas perpendicolarmente alla parete

$$dF_\perp = 2m \cdot \frac{n}{6} \langle |v| \rangle^2 \, dS$$

è al quadrato perché c'era una velocità nella espressione del volume.

Prendendo il numero di molecole che urtano la parete, moltiplicando per ~~la quantità di variazione~~ variazione di quantità di moto relativa a ciascuna di quelle molecole otteniamo dq_m, la ~~quantità~~ variazione totale di ~~variazione~~ quantità di moto:

$$d^2N \cdot 2m \cdot \langle |v| \rangle = dq_m$$

e dividendo per dt otteniamo la forza, la spinta perpendicolare alla parete.

E se dividiamo tutto per dS, l'area su cui la spinta avviene, otteniamo una pressione:

$$p = \frac{dF_\perp}{dS} = \frac{1}{3} \underset{\substack{\text{è numero delle molecole}\\ \text{per unità di volume}}}{\overset{\substack{\text{massa delle molecole}}}{m n}} \overset{\langle v \rangle^2}{\langle v^2 \rangle} = \frac{1}{3} m \boxed{\frac{N}{V}} \langle v^2 \rangle$$

il numero delle molecole per unità di volume è dato dal numero delle molecole diviso per il Volume

La pressione del gas dipende dal valor medio del quadrato della velocità delle molecole che compongono il gas.

L.22.6

Se introduco un $\frac{1}{2} m \cdot \langle v^2 \rangle$, questa è una energia cinetica.
Quindi questa sarebbe l'energia cinetica media di quelle molecole.
Se sommo insieme le energie cinetiche di tutte le molecole dovremmo avere l'energia totale contenuta all'interno del gas

$$U = \frac{1}{2} N m \underbrace{(\langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle)}_{\langle v^2 \rangle} + \ldots = \frac{N}{2} m \langle v^2 \rangle + \ldots$$

↳ Energia Interna del gas

L'energia interna del gas è un concetto importante.
È l'energia che si ottiene sommando tutte le energie che compongono le singole componenti del sistema.
Nel caso del gas perfetto l'unica energia in gioco è l'energia cinetica.
Se si sommano tutte le energie cinetiche del gas si ricava l'energia interna del gas.
In casi più complicati le molecole interagiscono tra di loro per cui ci sono altre componenti per cui l'equazione relativa è più complessa.

In un gas perfetto vale: $pV = \frac{2}{3} U$

Questa è una legge storica, di Boyle e Mariotte:

$$pV = N K_B T$$

↳ Costante di Boltzmann

LA LEGGE DICE che pressione per volume è proporzionale alla Temperatura del gas.

$$U = \frac{3}{2} N K_B T = \frac{\nu}{2} \cdot N K_B T$$

U → energia interna del gas

N → numero molecole

K_B → COSTANTE DI BOLTZMANN: CONVERTE L'UNITA' DI MISURA DELLA TEMPERATURA IN UNA UNITA' DI MISURA DELL'ENERGIA

T → Temperatura gradi Kelvin, Temperatura assoluta. 0 assoluto = $-273,15\ °C$

ν → questa lettera greca contiene il numero di gradi di libertà della molecola che costituisce il gas

$\frac{3}{2} N K_B T$: formula specifica per un gas perfetto

$\frac{\nu}{2} \cdot N K_B T$: formula generale

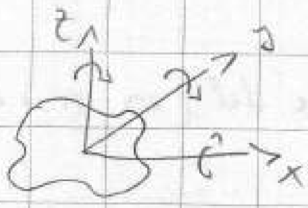
→ 3 è originato dalle componenti v_x, v_y e v_z della velocità, esso sarebbe il grado di libertà della molecola che costituisce il gas.

Se la molecola è una sbarretta, essa può muoversi in un asse cartesiano con una componente della velocità v_x, v_y, v_z, può anche ruotare, sia intorno all'asse delle x e dell'z, ma non rispetto all'asse delle y, per cui è ininfluente la rotazione.

Dunque il numero da dare per definire lo stato di moto è 5. I gradi di libertà sono 5, per cui la formula dell'energia interna è:

$$U = \frac{5}{2} N K_B T$$

Se le molecole sono oggetti estesi, non punti, forme, allora il numero di parametri aumenta. La traslazione della molecola richiede tre numeri, v_x, v_y e v_z, facendo riferimento al centro geometrico della molecola. La rotazione richiede altri tre numeri. Dunque il grado di libertà in questo caso è ~~sono~~ 6, la formula quindi cambia come segue:



$$U = 3 \cdot N \cdot K_B T$$

$$m \langle v_x^2 \rangle = K_B T$$

L'energia cinetica media relativa a quel certo grado di libertà è:

$$\langle W_{cin} \rangle = \frac{1}{2} K_B \cdot T$$

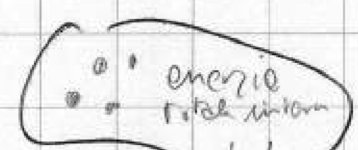
La temperatura in termodinamica è una misura di quale è l'energia interna cinetica media per ogni componente del sistema.
Più è alta la temperatura e più è alta l'agitazione termica, in cui le molecole si muovono ad una velocità media più elevata.

ENERGIA INTERNA

L'energia interna di un certo sistema formato da tanti componenti è la somma delle energie che competono ad ogni singolo elemento del sistema.
Nel caso del gas perfetto si tratta solo di energia cinetica, non ci sono altre interazioni.
In un gas reale non c'è solo l'energia cinetica, ma ci sono delle azioni esercitate ~~da~~ tra una molecola e l'altra.
L'energia interna si calcola considerando l'energia totale per ogni singola molecola che include il suo movimento e l'interazione con le molecole vicine moltiplicata per il numero totale di molecole.

L. 22.9

L'energia interna deve essere dedotta dalle sole energie



Sistema termodinamico con una energia interna U.

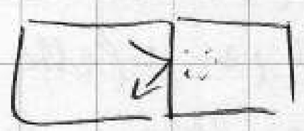
Se il sistema si muove ero avrà una certa energia cinetica, che non fa parte della energia interna.

L'energia interna si riferisce alla energia di una molecola e l'interazione con le altre.

Il sistema se ha una massa allora ha un peso e quindi ha una energia gravitazionale che non fa parte della energia interna, perché agisce in ugual misura su tutti i componenti.

CALORE

Il trasferimento dell'energia può essere fatto in due modi, o meccanico o attraverso il calore



32'40" $pS\,dx = d\mathcal{L} = p\,dV$

Trasferimento meccanico

Urti anelastici

Questo modo di trasferire energia è il calore, Q

IL CALORE È ENERGIA TRASFERITA IN MANIERA DISORDINATA DA OGNI COMPONENTE DI UN SISTEMA AD OGNI COMPONENTE DELL'ESTERNO.

calore: + se viene assorbito, è scaldato il sistema; − se ceduto

lavoro: + se il sistema compie lavoro sull'esterno

L'ENERGIA SI CONSERVA.

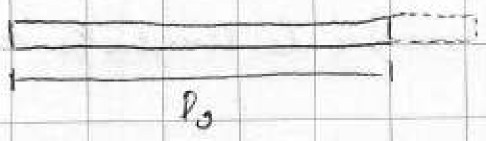
L. 22 10 $dU = dQ - p\,dV$ Primo principio della Termodinamica

LEZIONE 23 TERMOLOGIA (ID calore)

Prof Angelo Arbiglo
44'17"

Dilatazione termica
Termometri
Capacità termica
Calore specifico
Trasferimento di calore

DILATAZIONE TERMICA



Effetto sulla lunghezza di un materiale dovuto al riscaldamento.
La lunghezza della sbarretta sarà funzione della temperatura: $l(T)$.
La variazione è lineare nell'ordine della variazione di alcuni gradi.

$$l = l_0 (1 + \alpha (T - T_0))$$

l_0 → lunghezza iniziale
T_0 → temperatura iniziale
α → coefficiente di dilatazione lineare termica (lungo un solo asse), caratteristico del materiale

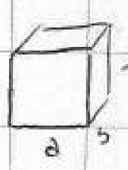
Lo sviluppo dell'equazione porta alla seguente:

$$\boxed{\frac{l - l_0}{l_0}} = \alpha (T - T_0)$$

→ questa quantità è direttamente proporzionale allo sbalzo di temperatura

L'allungamento è relativo, adimensionale.
Come c'è l'allungamento, c'è anche la contrazione lineare, al raffreddamento.

Nel caso di un oggetto tridimensionale, ci atteniamo alla stessa linearità.



$$a = a_0 [1 + \alpha [T - T_0]]$$

$$b = b_0 [1 + \alpha [T - T_0]]$$

$$c = c_0 [1 + \alpha [T - T_0]]$$

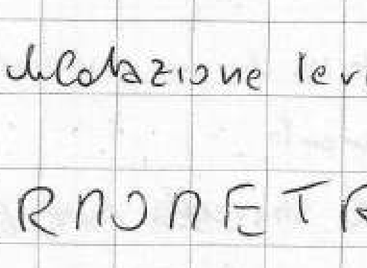
$$V_f = a \cdot b \cdot c = \underbrace{a_0 \cdot b_0 \cdot c_0}_{V_0} [1 + 3\alpha (T - T_0)]$$

$$\frac{V - V_0}{V_0} = 3\alpha (T - T_0)$$

La dilatazione termica è usata per misurare le temperature.

TERMOMETRI

Generalmente contenente un liquido (alcol o mercurio) in un tubicino di vetro, contenuto in un serbatoio la cui lunghezza varia con la temperatura, che viene definita proprio da quanto varia la lunghezza.

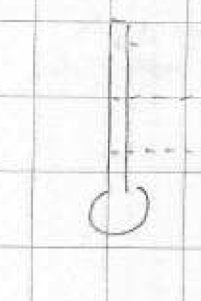


$$h = h_1 (1 + \alpha (t_2 - t_1))$$

↳ dislivello tra le due colonne

La condizione di linearità permette di graduare proporzionalmente la scala di riferimento

Altri termometri, pur funzionando con la stessa applicazione della dilatazione lineare, adottano un sistema diverso.



L'oggetto, al riscaldamento si dilata e la forma cambia. La dilatazione implica una torsione rispetto al punto fisso del sistema e l'indice mobile sulla scala individua la temperatura.

SCALE DI TEMPERATURA

a pressione costante,
1 atmosfera

Scala centigrada

$t_c = 0\ °C$ Ghiaccio che fonde (la T rimane costante finché c'è ghiaccio)

$t_c = 100\ °C$ Acqua che bolle (la T rimane costante finché c'è acqua)
↳ cambio di stato nella massa d'acqua

Scala Fahrenheit

congelamento dell'acqua salata

$t_F = 0\ °F \longleftrightarrow t_c = -17{,}778\ °C$

$$t_c = (t_F - 32) \cdot \frac{5}{9}$$

(la T superiore della scala Fahrenheit fa riferimento alla T del sangue di un essere vivente, doveva essere un cavallo?. La scala, fra i due estremi, fu divisa in 180 parti

Scala Kelvin

per le formule della Termodinamica

$1\ °C \equiv 1\ K$ la scala K usa lo stesso intervallo della scala Celsius

$0\ °C \longrightarrow 273{,}15\ K$

La scala Kelvin pone il suo limite inferiore allo 0 assoluto, $-273{,}15\ °C$

La scala Kelvin è la scala della temperatura assoluta, di riferimento in termodinamica.

26'
LA CAPACITA' TERMICA

Il calore è una energia che assume rilevanza in quanto trasferita da un sistema ad un altro attraverso dei processi a livello microscopico (agitazione molecolare, urto fra molecole, ecc.).
Dunque l'unità di misura del calore è il Joule, l'unità di misura dell'energia, nel sistema internazionale.
Storicamente, per studi di fine 700, l'unità di misura adottata è stata la caloria.

1 23 3

Piccola caloria : 1 cal = 4,1855 J (usata nel sistema CGS)

"1 caloria contiene 4,1855 J"

Grande caloria o Kilocaloria : 1 Cal = 1 Kcal = 1000 cal = 4185,5 J

Nelle diete le calorie in questione sono le grandi calorie, ovvero le kilocalorie

Nei paesi anglosassoni viene usata una unità di misura ancora diversa, la BTU, British Termal Unit, che è una cosa ancora diversa.
1 BTU = 252 cal = 1,055056 kJ.

NB: IL CALORE È ENERGIA E L'UNITÀ DI MISURA JOULE è quella dell'energia. Anche il BTU è unità di misura dell'energia nei paesi anglosassoni.
Esistono addirittura diverse tipologie di BTU.

La capacità termica

dipende da:

sostanza	temperatura
quantità	trasformazione termodinamica

Dato un oggetto, supponiamo di conferire del calore Q, ovvero lo scaldiamo aspettandoci che la sua temperatura cresca.
L'aumento di temperatura è definibile come:

$$\underbrace{\delta Q = C\,\delta T}$$

La quantità C è caratteristica dell'oggetto intero che viene scaldato

δ vuol dire qui una quantità arbitraria.

L'aumento di temperatura è proporzionale alla quantità di calore

La C è la capacità termica, misurata in J · grado kelvin o centigrado. Ma essa dipende da molte cose, dalla sostanza e dalla quantità di sostanza. 32'51''
Inoltre dipende dalla temperatura di partenza.
La quantità C è praticamente per intervalli piccoli di temperatura, non lo è viceversa.

L 23.4

Poi dipende dalla trasformazione termodinamica, ovvero si su ~~pareti~~ lavora a pressione costante, volume costante o altro.

IL CALORE SPECIFICO

È definibile dalla capacità termica

Il calore specifico di massa c_m ci libera dalla dipendenza dalla quantità di materia.

$$\underset{\text{calore specifico}}{c_m} = \frac{\overset{\text{capacità termica}}{C}}{\underset{\text{massa}}{m}}$$

quindi c_m è la capacità termica per unità di massa.

IL CALORE MOLARE

In chimica una quantità di materia si misura in moli.

Una mole è una quantità di materia di una certa sostanza pura equivalente al peso molecolare ed equivalente ad un numero di molecole pari al numero di Avogadro, $6{,}022 \cdot 10^{23}$.

L'acqua ha un peso molecolare di 18, quindi una mole sono 18 gr e il numero di molecole sono pari al numero di Avogadro.

$$\underset{\text{calore molare}}{C_n} = \frac{\overset{\text{capacità termica}}{C}}{\underset{\text{numero moli}}{n}}$$

CALORI SPECIFICI DEI GAS PERFETTI

c_p $\qquad$ $\underset{\text{se volume cost.}}{c_v}$ | che prendono in considerazione come scaldo la sostanza

Riprendendo il I° principio della termodinamica:

$$dU = dQ - p \cdot dV$$

L'energia interna di un sistema aumenta in base a due contributi, il calore (dQ) e il lavoro che facciamo ($-p\,dV$, è il lavoro fatto dal sistema verso l'esterno).

Un gas perfetto ha una espressione molto semplice della sua energia interna:

$$U = \boxed{\frac{3}{2}} \cdot \underset{\text{n moli}}{n}\, \overset{\text{costante di R, per ogni gas}}{R} \cdot \underset{\text{temp.}}{T} \qquad \text{energia interna di un gas perfetto}$$

per gas perfetti monoatomici, altrimenti è un altro numero.

$$dU = \frac{3}{2} \cdot n \cdot R \cdot dT$$

L'energia interna di un gas perfetto cambia perché cambia la sua T

In una trasformazione sul gas a volume costante, allora $dV = 0$

$V = cost. \rightarrow dV = 0$

Il termine $\frac{3}{2} nR\,dT = dQ$ perché il termine che veniva dopo, $-p\,dV$, è 0.

Scrivendo dQ in base alla definizione di capacità termica sarà:

$$dQ = n \cdot c_v \cdot dT$$

Dunque fatte le dovute semplificazioni abbiamo

$$c_v = \frac{3}{2} R.$$

La stessa operazione può essere fatta lavorando a pressione costante; in definitiva abbiamo

L 23.6

$$\frac{3}{2} nR\,dT = dQ - \underbrace{p\,dV}_{\text{lo trasformo già la pressione costante}}$$

$$p\,dV \rightarrow -\underbrace{d(p \cdot V)}_{\text{è costante, ma gas perfetti e vale } nRT} + \underbrace{V\,dp}_{\text{variazione di pressione}}$$

$p = cost \rightarrow V\,dp = 0$

$$\frac{3}{2} nR\,dT = dQ - \underbrace{nR\,dT}_{= d(pV)}$$

$dQ = n\,c_p\,dT$, quindi

$$\cancel{n}\, c_p\, \cancel{dT} = \frac{5}{2} \cancel{n} R\, \cancel{dT}$$

$$c_p = \frac{5}{2} R$$

IL TRASFERIMENTO DEL CALORE

Ci sono tre modalità

1) Per conduzione (per agitazione termica delle molecole a contatto lungo la parete che trasmettono il calore).

2) Per convezione (movimento della sostanza calda)

3) Per irraggiamento (energia elettromagnetica)

L.23.8

Gas perfetti monoatomici e biatomici

• Cv = 3/2R e Cp = 5/2R per il gas monoatomico

• Cv = 5/2R e Cp = 7/2R

Cv = calore specifico molare a volume costante

Cp = calore specifico molare a pressione costante

un gas perfetto è formato da molecole puntiformi fra cui non esistono forze di attrazione/repulsione l'unica forma di energia presente è Energia cinetica.

L' energia interna U è funzione di T

ora definiamo

Cv = (dU/dt)v = k derivata parziale rispetto a t con v costante

in una trasformazione isocora (V=costante) il calore scambiato è uguale alla variazione di e.interna Q= DU perche dal 1° principio della termodinamica DU=Q+L L=0 (v costante) il calore si trasforma completamente in energia interna e quindi in energia cinetica e le molecole acquistano una velocità media piu alta e di conseguenza la temperatura e pressione aumentano

du = dQ = n Cv dT -> DU = Q = n Cv DT

(Cv Costante in un intervallo DT)

se si prende una molecola di gas mono atomico è come una pallina libera di muoversi nello spazio.

Tramite la teoria cinetica dei gas si puo dimostrare che ogni grado di liberta di movimento da un contributo all energia cinetica pari a 1/2kT   k = costante di Bolzmann.

Ora un punto che si muove nello spazio puo traslare sui tre assi: mov x, mov y, mov z (non puo ruotare su stesso perche è un punto inf piccolo, in realtà non è vero, questo è uno dei limiti della teoria dei gas ideali).

Quindi 3 gradi di liberta quindi la sua energia cinetica E=U=3/2kT

ora per una molecola abbiamo U=3/2kT

per una mole dobbiamo moltiplicare per N avogadro U=3/2NkT

$Nk = R$ Cost. universale del gas perfetto ---> $U = 3/2RT$

Ora calcoliamo $Cv=(dU/dt)=d(3/2RT)/dT=3/2R$

Per un gas biatomico (bastoncino) abbiamo 3 gradi liberta per la traslazione + 3 assi per la rotazione(tuttavia uno viene trascurato perche poco influente quello che attraversa il bastoncino) quindi 5 gradi di liberta Quindi $Cv=5/2R$

Tuttavia le trasformazioni oltre che V costante possono avvenire anche a pressione costante e a volume variabile, in questo caso il gas espandendosi puo anche compiere lavoro può spostare un pistone.

Quindi 1° princ. $DU=Q+L \Rightarrow Q=DU+L$

possiamo definire la funzione di stato entalpia

$H=U+PV$ entalpia

la sua variazione corrisponde DH e corrisponde al calore scambiato in una trasformazione a pressione costante

$dH=d(U+PV)=dU+ PdV$

da $PV=RT$ $dv= RdT/P$ per una mole

$dH=dU+ RdT$

definiamo

$Cp=(dH/dT)p=k$

$Cp= dU/dT + Rdt/dt= Cv + R$

quindi per un gas monoatomico $Cp=3/2R+R=5/2R$

biatomico$=5/2R+R=7/2R$

Cp sempre maggiore di Cv il calore oltre a riscaldare il gas fa muovere il pistone

es

scaldiamo una mole di He da 200K a 300K quanto calore è necessario?

a) recipiente chiuso

b) recipiente con pistone

a) $Q=nCvDT=1*3/2R*100=150|R|$

b) $Q=nCpDT=1*5/2R*100= 250|R|$

L.23

Costante dei gas

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

Costante dei gas	
Simbolo	R
Valore	8,314472 (sequenza A070064 dell'OEIS)
Campo	numeri reali

La **costante dei gas** (o **costante universale dei gas**), simboleggiata dalla lettera ***R*** è una costante che mette in relazione la pressione *p*, la temperatura *T* (espressa in kelvin), il volume *V* e la quantità di sostanza *n*, secondo l'equazione:

$$pV = nRT$$

nota come *equazione di stato dei gas perfetti* in quanto riferita ad un ipotetico gas ideale, composto da sole particelle puntiformi prive di interazioni attrattive o repulsive tra loro. R rappresenta il lavoro che 1 mole di gas compie quando si espande alla pressione P costante di 1 atmosfera in seguito all'aumento di temperatura pari a 1 kelvin.

Valore della costante dei gas[1]	Unità di misura
8,314472	$J\ K^{-1}\ mol^{-1}$
8314,472	$J\ K^{-1}\ kmol^{-1}$
0,08205784	$L\ atm\ K^{-1}\ mol^{-1}$
$8,20574587 \times 10^{-5}$	$m^3\ atm\ K^{-1}\ mol^{-1}$
8,314472	$cm^3\ MPa\ K^{-1}\ mol^{-1}$
8,314472	$L\ kPa\ K^{-1}\ mol^{-1}$
8,314472	$m^3\ Pa\ K^{-1}\ mol^{-1}$
8314.472	$m^3\ Pa\ K^{-1}\ kmol^{-1}$
62,3637	$L\ mmHg\ K^{-1}\ mol^{-1}$
62,3637	$L\ Torr\ K^{-1}\ mol^{-1}$
83,14472	$L\ mbar\ K^{-1}\ mol^{-1}$
1,987	$cal\ K^{-1}\ mol^{-1}$
6,132440	$lbf\ ft\ K^{-1}\ g\ mol^{-1}$
10,7316	$ft^3\ psi\ °R^{-1}\ lb\text{-}mol^{-1}$
$8,617 \times 10^{-5}$	$eV\ K^{-1}\ atom^{-1}$
0,7302	$ft^3\ atm\ °R^{-1}\ lb\text{-}mol^{-1}$

Il suo valore è:

$$R = 8{,}314\,472\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\ K}}$$

Con lo sviluppo della meccanica statistica la costante è stata riespressa nella più fondamentale costante di Boltzmann, attraverso la conversione di unità di misura di quantità di sostanza da mole a uno mediante il numero di Avogadro:

$$R = N_A k_B$$

Dall'equazione di stato, mantenendo costanti la temperatura, la pressione o il volume si ottengono le equazioni empiriche sviluppate da Boyle, Charles e Gay-Lussac (rispettivamente per le trasformazioni isoterme, isobare e isocore).

Affermare l'esistenza di *R*, significa accettare lo stretto rapporto che intercorre tra il prodotto *p V* e la temperatura *T* del sistema (vedi anche i contributi di Boltzmann).

Costante dei gas specifica

La **costante dei gas specifica** sia per un gas che per una miscela di gas ($\bar{R}$) è data dalla costante universale dei gas divisa per la massa molecolare del gas o della miscela di gas.

$$\bar{R} = \frac{R}{M}$$

e l'equazione di stato dei gas perfetti si riscrive nella forma:

$$\frac{p}{\rho} = \bar{R}T$$

Dove con ρ si è indicata la densità. È comune rappresentare la costante dei gas specifica con il simbolo *R*. In questi casi il contesto o le unità di misura di *R* dovrebbero chiarire a quale delle sue costanti si faccia riferimento. Per esempio l'equazione della velocità del suono in un gas è usualmente scritta in termini della costante specifica.

La costante specifica per l'aria secca è

$$\bar{R} = 287{,}05\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\ K}}$$

Lezione 24 LE MACCHINE TERMICHE

Prof. A. Tartaglia
46'41"

Il II° principio della termodinamica
Trasformazioni reversibili e irreversibile
Trasformazioni cicliche
Rendimento di un ciclo
ciclo di Carnot
Cicli frigoriferi
Pompe di calore

IL II° PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

Il calore è una forma di energia particolare, non si può definire come contenuto energetico, ciò che è contenuto in un sistema termodinamico è quello che abbiamo chiamato l'energia che è ben definita. È una grandezza di stato, in un certo stato l'energia interna ha un certo valore. Il calore come tale è energia in una forma particolare e si definisce solo quando si ha un trasferimento da un sistema ad un altro e allora è energia che viene trasferita coinvolgendo in particolare i gradi di libertà microscopici, quelli delle singole molecole, dei singoli componenti dei sistemi che sono coinvolti.

Quando consideriamo il trasferimento di una certa quantità di calore da un mezzo ad un altro,

dQ

dobbiamo considerare che questo trasferimento influenzerà l'energia interna del sistema che cede calore e quello del sistema che riceve calore

Questa energia interna è legata alla temperatura assoluta del sistema che stiamo considerando che misura il valor medio della energia interna per ogni singolo componente del sistema.

Creando il rapporto

$$\frac{\delta Q}{T} = dS$$

calore che viene scambiato

variazione di entropia

T: temperatura del sistema che cede o acquista calore

di fatto stiamo confrontando una certa quantità arbitrariamente piccola di energia trasferita sotto forma di calore, quindi nella forma disordinata, senza erogazione di lavoro con l'energia cinetica media o l'energia interna media che per ogni componente del sistema che sta cedendo calore. Questo dà in qualche modo la misura della importanza relativa del trasferimento dell'energia sotto forma di calore rispetto al contenuto energetico misurato in qualche modo dell'energia interna del sistema.

Questo rapporto è piccolo è una variazione di una quantità della entropia

L'ENTROPIA in un sistema complesso è una variabile dello stesso tipo della energia interna.

È una variabile di stato.

Il contenuto di entropia di un sistema cambia al cambiare del calore.

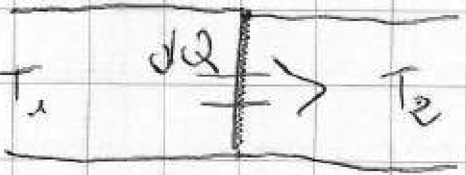
Il secondo principio della termodinamica entra in gioco, ad es. nello scambio di calore che avviene tra due sistemi uno vicino all'altro.

L.24.2

FORMULAZIONE STORICA del II° PRINCIPIO della TERMODINAMICA

II° PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

Il calore, spontaneamente, passa sempre dai corpi più caldi a quelli più freddi e non viceversa



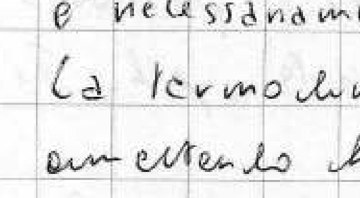
$T_1 > T_2$

Una certa quantità di calore dQ viene trasferita dalla regione a temperatura T_1 alla regione alla temperatura T_2.

Questo è formulato come un principio perché non c'è nessun teorema matematico o altra motivazione forte che ci dica che è necessariamente così.

La termodinamica statistica corregge l'affermazione ammettendo che la cosa più probabile è che il calore passi spontaneamente dal corpo più caldo a quello più freddo.

La conseguenza di questo principio sull'entropia del sistema è che la variazione di entropia nel sistema che cede calore è negativa



A e B sono in contatto termico, con $T_1 > T_2$

$dQ > 0$

$dS_A = -\frac{dQ}{T_1}$, si ha una riduzione del contenuto della energia interna della parte A

è VARIAZIONE DELLA ENTROPIA della PARTE A

L.24.3

La parte B riceve la quantità di energia sotto forma termica, quindi dQ è positivo e determinerà un aumento della energia interna.

Nel sistema B si sarà un aumento dell'entropia, definibile come:

$$dS_B = \frac{dQ}{T_2}$$

Nel trasferimento di calore, sia T_1 che T_2 cambiano, ma possiamo immaginare una variazione minima e localizzata "diluita". Diciamo che se immaginiamo essere A un termostato, ovvero un sistema fisico che è in grado di scambiare calore senza cambiare temperatura, allora possiamo dire che l'espressione $\frac{dQ}{T_1}$ è ben definita, perché T_1 ha un valore chiaro e ben determinato.
Lo stesso ragionamento può essere fatto per il sistema B, che ha temperatura T_2.

Sommando le due entropie abbiamo la variazione dell'entropia totale dell'insieme del corpo A e del corpo B.

$$dS_A + dS_B = dS$$

$$dS = -\frac{dQ}{T_1} + \frac{dQ}{T_2} > 0 \quad \text{perché } T_1 > T_2$$

Quindi l'entropia del sistema aumenta; l'entropia di un sistema spontaneamente non diminuisce mai.

L.24.4

L'entropia è attribuita al disordine di un sistema.
Aumentando essa, aumenta il disordine del sistema.

Entropia che non varia equivale a $dS = 0$:

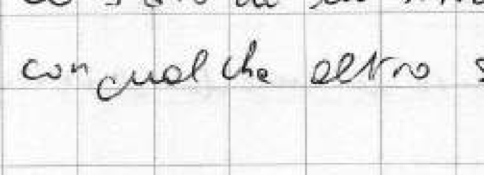
$$dS = -\frac{dQ}{T_1} + \frac{dQ}{T_2} = 0$$, vero solo se $T_1 = T_2$.

TRASFORMAZIONI REVERSIBILI E IRREVERSIBILI

Parliamo di trasformazioni dinamiche tutte le volte che lo stato di un sistema cambia.
Lo stato di un sistema può cambiare solo con una interazione con qualche altro sistema.

nel mondo reale sono delle "ideali"

Una trasformazione è reversibile quando può avvenire spontaneamente nei due versi.
È irreversibile quando non può avvenire spontaneamente in un verso.
Nel mondo reale le trasformazioni sono in genere irreversibili nel senso che comportano un aumento dell'entropia complessiva.



Uno stato è determinato in un diagramma da due variabili di stato, le altre possono essere ricavate.

variabili di stato: P, V, T, U, S

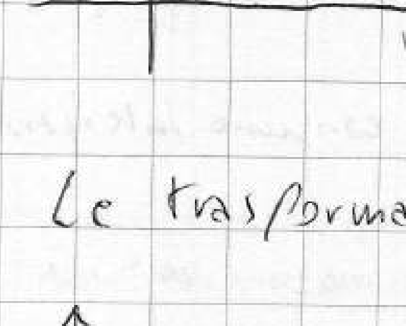
Con pressione e volume il piano è detto di Clapeyron.

1 26.5

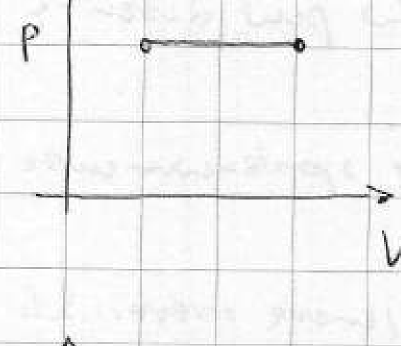
Un punto A nel piano corrisponde ad uno certo stato del fluido che ha una certa pressione ed un certo volume.
Se avviene qualcosa, ovvero se il sistema è in comunicazione con l'esterno e interagisce con l'esterno il suo stato cambierà.
Quando lo stato cambia si dice che avviene una trasformazione termodinamica.

Trasformazione termodinamica in cui il sistema passa dallo stato A allo stato B, con pressione e volume diversi dallo stato iniziale A.

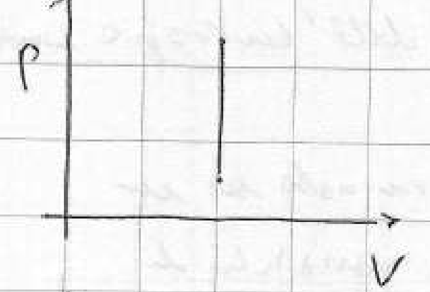
Le trasformazioni possono avvenire in modi diversi



a pressione costante, trasformazione isobara.



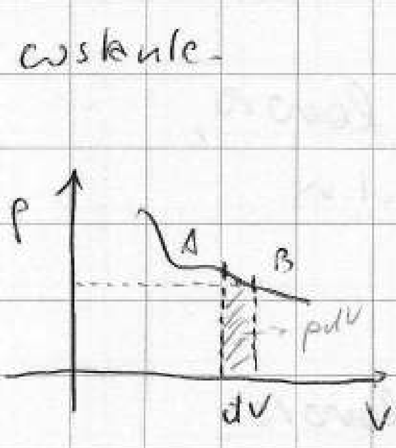
a volume costante, trasformazione isocora



a temperatura costante, trasforma isotermica

L. 24.6

Trasformazioni senza scambio di calore con l'esterno sono dette adiabatiche e sono trasformazioni a entropia costante.



$$\int_A^B p\,dV = \mathcal{L}_{AB}$$

In una trasformazione qualunque, se mi sposto di una quantità molto piccola tra due stati molto vicini, la variazione di volume è anch'essa molto piccola; facendo il prodotto tra la pressione, ad es nel punto di mezzo della trasformazione o in uno o l'altro, con la variazione di volume corrispondente

$$p \cdot dV = d\mathcal{L}$$

ovvero il lavoro elementare che il sistema compie per modificare il volume.

L'interpretazione geometrica $p\,dV = d\mathcal{L}$ è che $p\,dV$ è un'area, quindi sommando insieme tutti i lavori fatti spostandomi da uno stato all'altro ottengo il lavoro fatto dal sistema per cambiare lo stato A e B

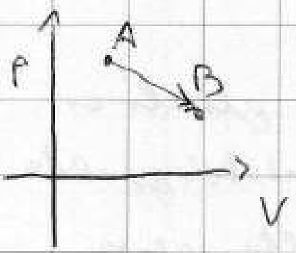
$$\int_A^B p\,dV = \mathcal{L}_{AB}$$

Nel piano di Clapeyron pV, le aree rappresentano un lavoro.

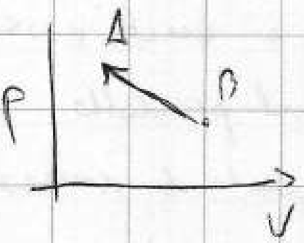
Si nota che per andare da B ad A, l'area è la stessa, ma il lavoro non è fatto dal sistema, ma subito, cioè qualcuno fa un lavoro sul sistema. Il sistema riceve il lavoro, per il sistema il lavoro è negativo.

L26.7

Mentre per andare da A a B è il sistema che lavora ed il lavoro ha un valore positivo



Il sistema compie un lavoro,
il lavoro ha valore positivo



Il sistema riceve un lavoro,
il lavoro ha valore negativo.

TRASFORMAZIONI CICLICHE

24'44"

In figura pistone di un motore a scoppio, un motore a 4 tempi (4 fasi, rappresentate in figura)

In un motore a scoppio, rappresentato in figura, cioè un motore a 4 tempi, ci sono delle fasi che si ripetono ciclicamente.
In una trasformazione ciclica, per definizione, occorre avere sempre la stessa materia in gioco.
Quindi, da questo punto di vista, un motore a scoppio è rappresentazione di trasformazioni pseudo-cicliche, in quanto la miscela aria-combustibile nel pistone cambia ogni volta.

Una trasformazione ciclica in un gas, dallo stato A passiamo allo stato B e dallo stato B passiamo allo stato A.
Il senso di percorrimento del diagramma è orario.

L'area sottesa al percorso $A \to B$ rappresenta un lavoro fatto dal sistema.
Da B verso A abbiamo un lavoro fatto dall'esterno, che, in valore assoluto, ha un valore inferiore di quello fatto da A a B:

$$|\mathcal{L}_{AB}| > |\mathcal{L}_{BA}|$$

$$\oint d\mathcal{L} = \mathcal{L} \neq 0$$ ed è praticamente l'area racchiusa tra le due curve

Con questo processo ciclico si estrae dal sistema del lavoro utile, utile per produrre effetti fisici, come muovere l'albero di una macchina.
Questo ciclo è la rappresentazione formale di un motore, che consente di dar luogo ad un lavoro di tipo meccanico.

Ricordando il I° principio della termodinamica, la variazione di energia interna di un sistema termodinamico in generale è data dal calore che il sistema riceve dall'esterno meno il lavoro che il sistema eroga all'esterno

I° principio della Termodinamica

$$\boxed{dU = dQ - \underbrace{p \cdot dV}}$$

VARIAZIONE ENERGIA INTERNA DI UN SISTEMA TERMODINAMICO, | Calore ricevuto dal sistema | Lavoro che fa il sistema

$dU \Rightarrow$ piccola variazione; lo stato varia poco

Applicando il I° principio della termodinamica sommiamo tutto (dU) da A ad A, ovvero facciamo la somma integrale, di tutte le variazioni di energia interna lungo un percorso chiuso.

VARIAZIONE ENERGIA INTERNA NEL CICLO

$$\boxed{\oint dU}$$

1 71 9

$$\underbrace{\underbrace{U_{finale}}_{\text{valore energia interna nello stato finale}} - \underbrace{U_{iniziale}}_{\text{valore energia interna nello stato iniziale}}}_{\text{in un ciclo lo stato iniziale e quello finale coincidono, quindi le due energie interne coincidono.}} = \underbrace{0}_{}$$

perché in un ciclo l'energia interna dello stato finale coincide con quella dello stato iniziale, lo stato è lo stesso!

Applicando il I° principio della termodinamica abbiamo:

$$0 = \underbrace{\overset{\text{calore}}{Q}_{scambiato}}_{} - \underbrace{L_{eseguito}}_{\text{Lavoro eseguito durante il ciclo}}$$

quantità di calore scambiato durante il ciclo.
È DOVUTO A DUE CONTRIBUTI:
il calore assorbito dal ciclo e il calore ceduto dal ciclo

$$Q_{scambiato} = Q_{assorbito} - Q_{ceduto}$$

$$\underbrace{L}_{} = Q_{assorbito} - Q_{ceduto}$$

Lavoro ottenuto durante la trasformazione ciclica

Questa proprietà dei cicli termodinamici, con trasformazioni tutte reversibili, quindi trasformazioni lentissime, idealizzate in cui ad ogni passaggio la temperatura cambia molto poco, ci porta alla definizione del rendimento del ciclo.

RENDIMENTO DI UN CICLO

Il termine rendimento ha valore generale ed è ciò che di utile ricaviamo da un ciclo, cioè il lavoro fornito dal ciclo diviso per il calore che il ciclo assorbe. Il calore ceduto è indipendente.

$$\underbrace{\eta}_{\text{Rendimento}} = \frac{\mathcal{L}^{\text{= lavoro ottenuto dal ciclo}}}{Q_{ass.} \text{= calore assorbito dal ciclo}}$$

In un motore di auto il lavoro è il movimento, il calore assorbito è il potere calorifico della benzina, del carburante.

Il calore ceduto non entra nel conteggio perché avviene in maniera indipendente da noi e, sempre nel caso di un auto viene portato via dai gas caldi che escono dal tubo di scappamento.

Il rendimento è un fattore di qualità che informa su quanto è buono un motore.

Abbiamo: sostituendo $\mathcal{L}$:

$$\eta = \frac{Q_{ASSORBITO} - Q_{CEDUTO}}{Q_{ASSORBITO}} = 1 - \frac{Q_{CEDUTO}}{Q_{ASSORBITO}}$$

Per la conservazione dell'energia è evidente che non si possa cedere più calore di quanto se ne assorbe se ho del lavoro ottenuto per cui il rapporto tra Q_{CEDUTO} e $Q_{ASSORBITO}$ non può essere mai maggiore di 1.
Se "buttassi via" tutto il calore che assorbo, il rendimento sarebbe 0, non ci sarebbe nessun lavoro fornito dal ciclo.

L 24 11

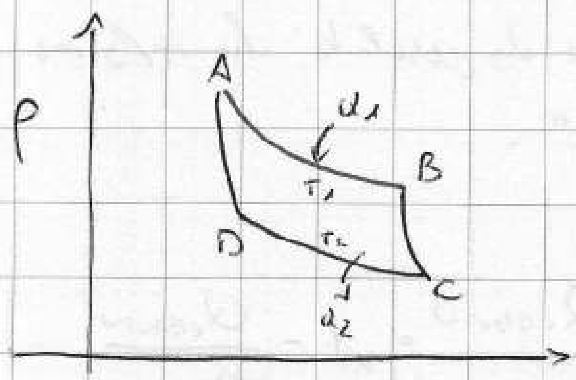
Notiamo che il valore massimo del rendimento è 1, quando, al limite, il calore ceduto è nullo. Tutto il calore ricevuto è convertito in lavoro utile. Nella realtà questo non è possibile.
I rendimenti sono, di solito, numeri minori di 1.
Cioè non possiamo trasformare tutto il calore disponibile nel motore in lavoro, qualcosa viene perso invariabilmente.
Per spiegare perché il rendimento è sempre minore di 1, si fa riferimento al ciclo di Carnot

IL CICLO DI CARNOT

34'52"

Per spiegare perché il rendimento è sempre < 1.

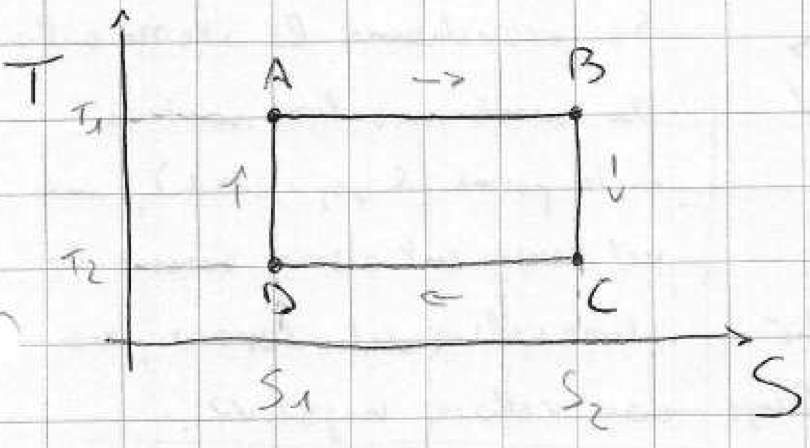
È un ciclo particolare che ci dà conclusioni di tipo generale.



Da A a B ci muoviamo a temperatura costante (una isoterma).
Da B a C la trasformazione è senza scambio di calore con l'esterno (trasf. adiabatica).
Da C a D, comprimendo torniamo indietro: il lavoro è compiuto dall'esterno, a temperatura costante (condizioni isoterme).
Da D ad A, risaliamo con una ulteriore compressione in una trasformazione adiabatica, senza scambio di calore con l'esterno.
Questo ciclo particolare ha un'area che rappresenta

il lavoro che può essere ricavato dal ciclo.

Il risultato che ci interessa può essere ottenuto semplicemente senza esplicitare i calcoli sulle curve. Lo stesso ciclo può essere rappresentato usando delle variabili di stato diverse da p e da V. In questo caso useremo Temperatura ed entropia (S).



- A - B isoterma
- B - C adiabatica (senza scambio di calore, entropia costante)
- C - D isoterma
- D - A adiabatica

$$\underbrace{\mathcal{L}}_{\text{lavoro ricavato dal ciclo}} = (S_2 - S_1) \cdot (T_1 - T_2)$$

Questa rappresentazione è molto conveniente; l'area è sempre il lavoro svolto e geometricamente è un rettangolo.

$$\underbrace{\eta^{ca}}_{\text{Rendimento}} = \frac{(S_2 - S_1)(T_1 - T_2)}{T_1 \underbrace{(S_2 - S_1)}_{\text{variazioni di entropia durante le trasform}}} =$$

$= Q_1$

calore da A a $B = Q_1$ che in termini di entropia sarà $T_1 (S_2 - S_1)$, la Temperatura per la variazione di entropia durante la trasformazione

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad (\text{mai} = 1)$$

Il rendimento è 1 solo se T_2, temperatura finale, è equivalente allo 0 assoluto, che secondo un principio non è raggiungibile in tempi definiti.

Si può dimostrare che qualunque ciclo chiuso termodinamico ideale ha un rendimento pari al ciclo di Carnot che si svolge tra le stesse temperature estreme.

1 2 4 1 3

I CICLI FRIGORIFERI

Possiamo immaginare un ciclo che si svolge in senso antiorario

Se prendiamo lo stesso ciclo di una macchina motrice visto prima (pag L.24.8), ma nel senso antiorario, avremo lo stesso valore del lavoro, ma con valore negativo.

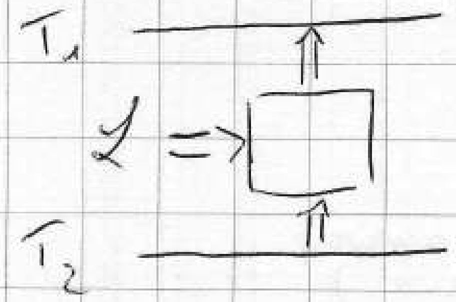
$\mathcal{L} < 0$

Il lavoro è negativo perché il lavoro positivo si ha lungo la parte inferiore della curva e il lavoro negativo si ha nella parte superiore della curva e facendo la somma algebrica prevale il fattore negativo. Dunque sono io a lavorare sul ciclo piuttosto che sia il ciclo a fornire lavoro.

In queste condizioni abbiamo il cosiddetto ciclo frigorifero

$\mathcal{L} = Q_{ASSORBITO} - Q_{CEDUTO} < 0$

Quindi in questo ciclo cedo più calore di quanto non ne assorba. Prelevo calore da qualche parte, da un serbatoio di calore, da un termostato e lo cedo ad un altro e lo faccio in senso inverso a quello che succede in una macchina termica.



La macchina riceve lavoro e il risultato è che essa preleva calore dal luogo a temperatura bassa e lo trasferisce a quello a temperatura alta.

Nel frigorifero domestico la regione a temperatura bassa è quella interna al frigorifero, la regione a temperatura alta è la temperatura esterna al frigorifero, quella dell'ambiente.

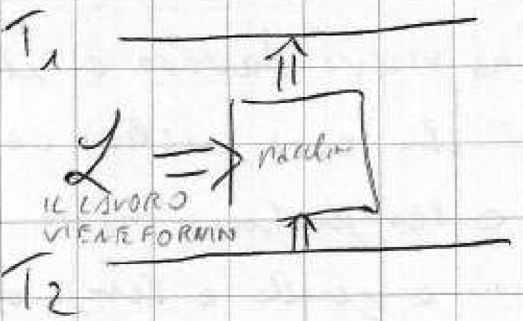
Il frigorifero preleva calore dall'ambiente interno e lo trasferisce all'ambiente esterno, la temperatura interna del sistema diminuisce: $T_2 \Rightarrow$ diminuisce

Il frigorifero è una macchina che assorbe lavoro, sottrae calore alla parte fredda e lo restituisce all'esterno; quindi la parte fredda si raffredda sempre più.
C'è un'altra applicazione dello stesso principio che è la pompa di calore

LE POMPE DI CALORE

44'10"

In essa il corpo a temperatura bassa è molto grande.
in figura si immagina una falda acquifera, che ha una temperatura praticamente costante.
La regione a temperatura più alta, T_1, ha un volume finito, nella figura una casa.



(T_2 = freddo ambiente, T costante)

Introdurre calore in un volume limitato vuol dire aumentare la temperatura, così T_1 aumenta man mano che si "pompa" calore dalla parte più fredda verso quella più calda

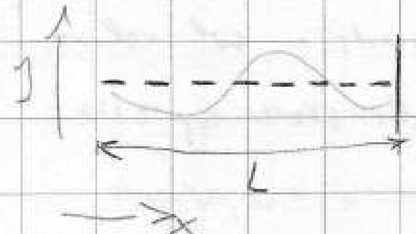
1.24.16

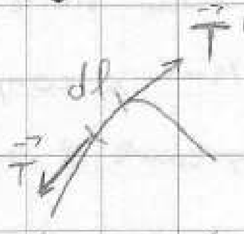
LEZIONE 25 LE ONDE

Prof. Angelo Tartaglia
42'03"

Oscillazioni di una corda
Il moto
che cos'è un'onda

LE OSCILLAZIONI DI UNA CORDA





porzione di fune isolata

Le azioni sulla fune sono la TENSIONE T' della fune. La fune esercita forze su se stessa, nella sua direzione. La tensione è tangente alla curva che rappresenta la fune. Per la TENSIONE T.

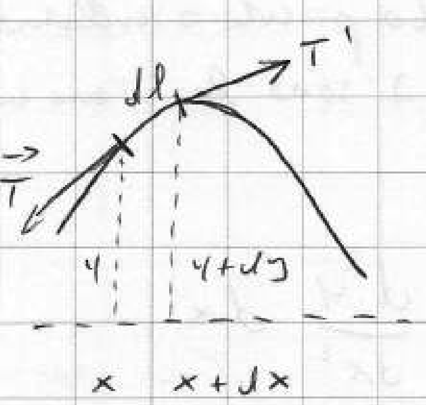
$|\vec{T}| = |\vec{T}'|$.

Se così non fosse ci sarebbe del trasferimento di materiale lungo la fune.

$$\boxed{\lambda} = \frac{dm}{dl} = \frac{m}{L}$$

m = massa
L = lunghezza

massa per unità di lunghezza



$$\vec{R} = \vec{T} + \vec{T}' \qquad d\vec{R} = \lambda \cdot a \cdot dl$$

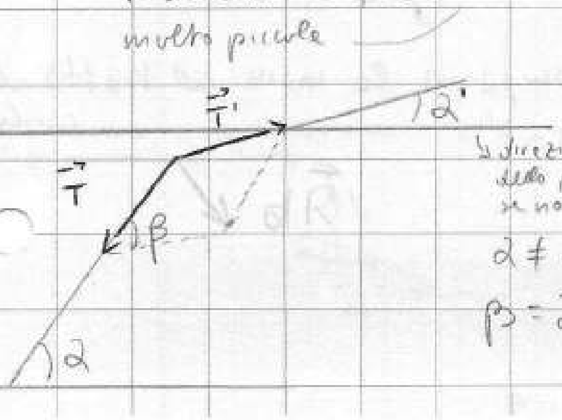
(la risultante è una forza massa per accelerazione)

La risultante $\neq 0$ molto piccola

$\lambda \cdot dl$ è la massa

a è l'accelerazione

$$\beta = \alpha' - \alpha = d\alpha$$

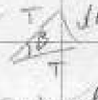


la direzione orizzontale della fune che avrebbe se non fosse scossa

$\alpha \neq \alpha'$

$\beta = \alpha' - \alpha = d\alpha$

$$dR = 2T \sin\frac{\beta}{2} \simeq T\, d\alpha$$



pura geometria

Triangolo isoscele, con dR che ne è la base

$$dR = 2T \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cong T\, d\alpha$$

è una espressione esplicita della risultante delle forze di tensione ai capi di un piccolo tratto di corda

$$\tan\alpha = \frac{dy}{dx}$$

$\tan\alpha = \frac{dy}{dx}$

Se l'angolo α è piccolo, alcune funzioni geometriche (ad es. sin e tan) hanno un valore numerico che tende a confondersi col valore numerico che rappresenta l'angolo stesso espresso in radianti. *deve essere usato il radiante.*

Se $\alpha \le 5°$ ($0{,}0873$ rad) allora

$$\frac{\tan\alpha - \alpha}{\alpha} \le 2 \cdot 10^{-4}$$

↳ lo scostamento tra α e $\tan\alpha$ comincia al 4° decimale, al 3 di 0,0873

Se la tolleranza è all'1 per mille, $\tan\alpha$ e α possono essere usati in modo indifferente. Quindi, considerando piccole oscillazioni della corda, $\tan\alpha$ e α sono la stessa cosa.

$$d\alpha \approx d(\tan\alpha) = d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}\,\underbrace{dx}_{\text{variabile indipendente}}$$

E quindi $\boxed{dR = T \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\, dx}$ Risultante delle forze di tensione

Relativamente all'inerzia, dove compariva la massa del tratto di corda.

α piccolo, $\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \dots \Rightarrow \cos\alpha$ per α piccolo è vicino a 1.

$$dx = dl\cos\alpha \cong dl$$

proprietà geometrica triangoli rettangoli:
se dl è piccolo si può ritenere essere una linea retta piuttosto che un arco di curva

$$\underbrace{T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}dx}_{\text{Risultante forze di tensione}} = \underbrace{\lambda \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx}$$

λdx è la massa;

$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ è l'accelerazione della corda, la derivata è parziale perché y non dipende solo dal tempo

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\lambda}{T}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}$$

dx tolto perché irrilevante.

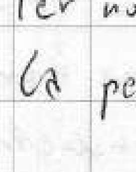
Quello che succede alla perturbazione della forma della corda è descritto da una equazione come questa.

24'45'

IL SUONO

È una perturbazione che si propaga attraverso un mezzo qualsiasi.
Per noi il mezzo ~~elettro~~ è un gas, l'aria.
La perturbazione sarà nella pressione dell'aria.

FLUTTUAZIONE DELLA PRESSIONE



un cubetto di aria, di dimensioni infinitesime.

dV volume del cubetto d'aria, $dV = S\,dX$

ρ densità del gas

T temperatura

$d\xi$ fluttuazione di pressione nel volume del gas, $d\xi$ "de xi".

Il volume si modifica $d(dV) = S\,d(dx) = S\,\underbrace{d\xi}$

cambiamento di volume. Il gas non si sposta, ma si comprime. TRASFORMAZIONE ADIABATICA, SENZA SCAMBIO DI CALORE

$$\rho V = \rho_0 V_0$$
$$\rho V^\gamma = \rho_0 V_0^\gamma$$

L. 25.3

La variazione di pressione implica una forza che viene esercitata su una faccia del cubetto.
Questa forza si oppone alla variazione di pressione e quindi

$$dF = -dp\,S$$

è uguale a meno la variazione di pressione, la differenza di pressione tra lato destro e lato sinistro moltiplicata per la sezione o la superficie della faccia di questo cubetto.
Possiamo osservare che questa forza netta agisce sul fluido contenuto nel cubetto che è stato schiacciato per via delle fluttuazioni di pressione.
Questa forza deve quindi essere uguale alla massa del fluido (densità × volume, $\rho \cdot dV$) moltiplicata per l'accelerazione $\left(\frac{\partial \xi^2}{\partial t^2}\right)$; con segno meno dovuto al fatto che la deformazione veniva all'indietro rispetto all'asse delle x.

$$\underbrace{dp\,S}_{F} = - \underbrace{\rho\, dV}_{m}\, \underbrace{\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}}_{a}$$

che è sempre una delle leggi di Newton: $F = ma$.

Ma ricordiamoci che $dV = S \cdot dx$, per cui, in finale abbiamo

7

L.25.4

30'50"

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

gamma è una costante

$$p = p_0 \frac{v_0^{\gamma}}{v^{\gamma}} = \gamma$$

$$p = p_0 \frac{(dx)^{\gamma}}{(dx + d\xi)} = \frac{p_0}{\underbrace{\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right)}_{\text{sviluppo in serie}}} \cong p_0 \left(1 - \gamma \frac{\partial \xi}{\partial x}\right)$$

misura l'oscillazione locale delle molecole d'aria o di fluido; non si spostano, ma oscillano nel posto.

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{\boxed{\gamma p_0}} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$ } equazione delle onde o eq armonica

la x ci dice in che punto del fluido siamo

pressione media di riposo del gas

Rapporto tra calore specifico a pressione costante e a volume costante del gas

ξ misura l'oscillazione locale delle molecole d'aria o di fluido; non si spostano ma oscillano nel posto

x è la variabile che ci dice in che punto del fluido siamo

γ è il rapporto tra calore specifico a pressione costante e a volume costante del gas

p_0 è la pressione media di riposo del gas

Questa equazione ci ricorda nella forma quella ~~equ~~ della corda risonante.

Questa equazione, delle onde, è detta anche armonica

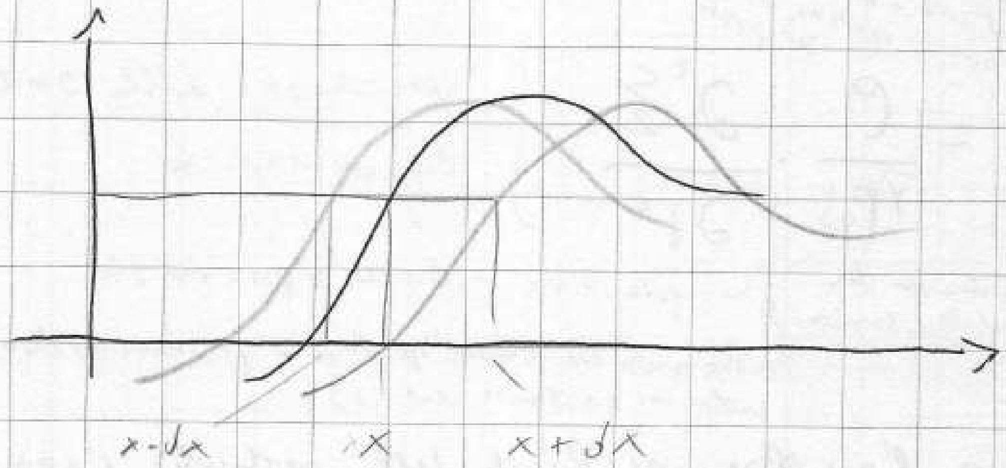
CHE COS'È UN'ONDA

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{\boxed{v^2}} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

↳ parametro positivo

Soluzione generale in forma di onda

$$f = f(x \pm vt)$$



$$f = f(x \pm vt) = f(\eta) = f(x + dx \pm vt \pm v\,dt)$$

$dx - v\,dt = 0 \Rightarrow v = \frac{dx}{dt}$ moto progressivo

$dx + v\,dt = 0 \Rightarrow v = -\frac{dx}{dt}$ moto regressivo

La forma d'onda si propaga con una velocità v.

L.25.6

ONDE TRASVERSALI DI UNA CORDA

$$|v| = \sqrt{\frac{T}{\lambda}}$$

T = tensione della corda fissa

λ = densità per unità di lunghezza della corda.

Nella corda si hanno delle perturbazioni trasversali che si propagano. Sono delle onde con una velocità di propagazione $\sqrt{\frac{T}{\lambda}}$

Più alta è la tensione della corda e più veloce va l'onda, la perturbazione.

Più massiccia è la corda e più lenta va l'onda

VELOCITÀ DEL SUONO IN UN GAS

$$|v| = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$$

Densità elevata (ρ) => velocità del suono diminuisce

Se, a parità di densità, aumentiamo la pressione => la velocità aumenta

γ, che dipende dalla natura del fluido, dalle sue proprietà termiche.

L 25.8